Liet. matem. rink., **47**, *spec. nr.*, 2007, 123–127

Absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesiniai svyravimai. Asimptotikų konstravimas

Aleksandras KRYLOVAS, Paulius MIŠKINIS (VGTU)
el. paštas: akr@fm.vtu.lt

Reziumė. Nagrinėjamas stygos netiesinių svyravimų matematinis modelis. Uždavinio asimptotiniam sprendiniui rasti konstruojama suvidurkintoji integralinių diferencialinių lygčių sistema.

1. Įtemptos absoliučiai tamprios nesvarios stygos skersinių svyravimų diferencialinė lygtis $\phi_{tt} = c_0^2\phi_{xx}$ pateikiama beveik visuose matematinės fizikos ar diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis vadovėliuose. Čia $\phi(x,t)$ yra stygos nuokrypis taške x laiko momentu t, $c_0 = \sqrt{T/\rho}$ – garso greitis stygos medžiagoje, priklausantis nuo jos įtempimo T ir tankio ρ. Tačiau ši tiesinė diferencialinė lygtis tampa banginių laisvųjų svyravimų matematiniu modeliu tik esant labai supaprastintam tiriamajam judėjimui. Galima parodyti (žr. [1], 12 p.), kad jei atsisakyti mažo gradiento sąlygos

$$\left|\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right| \ll 1, \tag{1}$$

(čia $\theta(x,t)$ yra stygos elemento nuokrypio kampas nuo pusiausvyros padėties), tai stygos elemento judėjimo lygtis bus tokia

$$\phi_{tt} = \frac{c_0^2\phi_{xx}}{\sqrt{(1+\phi_x^2)^3}}. \tag{2}$$

Tuo atveju, kai nukrypimai nuo pusiausvyros padėties yra nykstamai maži (t.y. kai galioja (1) sąlyga), stygos judėjimo (2) lygtis tampa gerai žinoma tiesine bangine lygtimi. Bendruoju atveju, harmoninės bangos

$$\phi(x,t) = A\cos\left(x \pm c_0 t + \varphi_0\right)$$

nesudaro netiesinės dalinių išvestinių (2) diferencialinės lygties sprendinių.

Šiame darbe nagrinėjami absoliučiai tamprios nesvarios stygos netiesiniai svyravimai, apibūdinami (2) lygtimi, padarius dvi svarbias prielaidas:

1) atsižvelgus į galimus stygos medžiagos arba įtempimo nehomogeniškumus, laikysime, kad garso greitis c yra silpnai periodinė erdvinė funkcija

$$c = c_0\left(1 + \varepsilon_1\cos\omega x\right), \quad \varepsilon_1 \ll 1;$$

2) įvesdami dar vieną mažąjį bedimensinį parametrą ε_2, pasinaudosime skleidiniu:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+(\varepsilon_2\phi_x)^2)^3}} = 1 - \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\phi_x^2 + \frac{15}{8}\varepsilon_2^4\phi_x^4 + \mathrm{O}(\varepsilon_2^6), \quad \varepsilon_2 \ll 1.$$

Mažojo parametro ε_2 įvedimas leidžia atsisakyti (1) reikalavimo ir nagrinėti nemažus stygos nuokrypius nuo pusiausvyros padėties $\phi_x = \mathrm{O}(1)$.

Atsižvelgiant į padarytas prielaidas ir įvedant redukuotą laiką $\tau = t/c_0$, (2) lygtis pereina į tokią lygtį

$$\phi_{\tau\tau} - \big(1 + \varepsilon_1 \cos\omega x\big)\phi_{xx}\Big(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\phi_x^2 + \frac{15}{8}\varepsilon_2^4\phi_x^4\Big) = 0. \tag{3}$$

2. Mes nagrinėsime (3) lygtį, esant prielaidai, kad mažieji parametrai ε_1 ir ε_2 turi šį sąryšį[1]

$$\frac{3}{16\beta}\cdot\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2\alpha}\cdot\varepsilon_1 = \varepsilon. \tag{4}$$

Tada iš (3), (4) gauname

$$\phi_{\tau\tau} - \phi_{xx} = \varepsilon\big(\alpha\cos(\omega x)\phi_{xx} - \beta\phi_x^2\big) + \mathrm{O}(\varepsilon^2). \tag{5}$$

Pažymėję

$$r^+ = \phi_\tau + \phi_x \quad \text{ir} \quad r^- = \phi_\tau - \phi_x,$$

perrašome (5) lygtį ekvivalenčiąja sistema Rymano invarianatais

$$\frac{\partial r^\pm}{\partial\tau} \mp \frac{\partial r^\pm}{\partial x} = \pm\varepsilon\Big(\frac{\partial r^+}{\partial x} + \frac{\partial r^-}{\partial x}\Big)\cdot\big(\alpha\cos\omega x - \beta(r^+ - r^-)^2\big). \tag{6}$$

Nesutrikdytoji (t.y. kai $\varepsilon = 0$) (6) sistema aprašo bėgančiąsias į skirtingas puses dvi nepriklausomas bangas $r_0^-(x+\tau)$ ir $r_0^+(x-\tau)$. Čia $r^\pm(x)$ yra tolydžiai diferencijuojamos funkcijos, apibrėžiančios pradines (6) uždavinio sąlygas. Bandydami konstruoti tiesioginį asimptotinį artinį

$$r^\pm(x,\tau) = r_0(x\pm\tau) + \varepsilon r_1^\pm(x,\tau) + \cdots, \tag{7}$$

susidursime su būdinga asimptotinei analizei sekuliariųjų narių $\varepsilon\tau$ problema. Dėl jų (7) asimptotika bus tinkama tik kai $\varepsilon\tau \ll 1$, t.y. trumpame laiko intervale $\tau \ll \varepsilon^{-1}$. Šio darbo tikslas yra tolygiai tinkamų didelėje srityje

$$(\tau, x) \in \Big[0, \frac{c}{\varepsilon}\Big] \times (-\infty, +\infty)$$

asimptotikų konstravimas. Čia c ir visos kitos konstantos nepriklauso nuo mažojo parametro ε.

[1] Pastebėkime, kad mūsų metodika taikytina ir kai (4) prielaida negalioja, t.y. kai $\varepsilon_2^2 \ll \varepsilon_1$ arba $\varepsilon_2^2 \gg \varepsilon_1$, kadangi tai tik supaprastina (3) uždavinio asimptotinę analizę, nes (5) lygtyje lieka mažiau eilės $\mathrm{O}(\varepsilon)$ narių.

3. Pažymėkime lėtąjį laiką
$$T = \varepsilon\tau$$
ir greituosius charakteristinius kintamuosius
$$y^{\pm} = x \pm \tau.$$
Asimptotinio (6) uždavinio artinio ieškome pavidalu

$$r^{\pm}(x, \tau; \varepsilon) \approx R^{\pm}(T, y^{\pm}).$$

Funkcijos $R^{\pm}$ ieškomos sprendžiant tokią suvidurkintąją sistemą

$$\frac{\partial R^{\pm}}{\partial T} = \pm\left\langle \left(\frac{\partial R^{+}}{\partial y^{+}} + \frac{\partial R^{-}}{\partial y^{-}}\right) \cdot \left(\alpha \cos\omega x - \beta (R^{+}R^{-})^{2}\right)\right\rangle_{\pm} \tag{8}$$

Vidurkinimo pagal charakteristikas operatoriai $< \cdots >_{\pm}$ apibrėžiami taip:

$$\left\langle g(T, x, y^{+}, y^{-})\right\rangle_{+} \equiv \lim_{S\to+\infty} S^{-1}\int_0^S g(T, y^{+} - s, y^{+}, y^{+} - 2s)\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

$$\left\langle g(T, x, y^{+}, y^{-})\right\rangle_{-} \equiv \lim_{S\to+\infty} S^{-1}\int_0^S g(T, y^{-} + s, y^{-} + 2s, y^{-})\,\mathrm{d}s. \tag{10}$$

Iš (9), (10) apibrėžimų išplaukia (žr. [2]) vidurkinimo operatorių savybės

$$\left\langle \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}}\right\rangle_{\mp} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} R^{\pm}\right\rangle_{\mp} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} (R^{\pm})^{2}\right\rangle_{\mp} = 0, \tag{11}$$

$$\left\langle \frac{\partial R^{\mp}}{\partial y^{\mp}} \cos\omega x\right\rangle_{\mp} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial R^{\mp}}{\partial y^{\mp}} (R^{\pm})^{2}\right\rangle_{\mp} = \frac{\partial R^{\mp}}{\partial y^{\mp}}\left\langle (R^{\pm})^{2}\right\rangle_{\mp}, \tag{12}$$

teisingos tolydžiai diferencijuojamoms apibrėžtoms srityje

$$(T, y) \in [0, T_0] \times (-\infty, +\infty)$$

funkcijoms $R^{\pm}(T, y)$ (T_0 – teigiama konstanta). Taikome (11), (12) formules (8) sistemai:

$$\frac{\partial R^{\pm}}{\partial T} \pm \beta (R^{\pm})^{2} \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} = \pm\alpha\left\langle \frac{\partial R^{\mp}}{\partial y^{\mp}} \cos\omega x\right\rangle_{\pm} \pm \beta \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\mp}}\left\langle (R^{\mp})^{2}\right\rangle_{\pm}. \tag{13}$$

4. Tarkime, kad (6) sistema papildyta pradinėmis sąlygomis

$$r^{+}(x, 0) = r_0^{+}(x), \quad r^{-}(x, 0) = r_0^{-}(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{14}$$

Randamas sprendžiant (13), (14) suvidurkintąją sistemą asimptotinis sprendinys gali būti konstruojamas, kai funkcijos r^{+} ir r^{-} nyksta begalybėje:

$$\lim_{|x|\to\infty} r^{\pm}(x) = 0. \tag{15}$$

Tokiu atveju (13) sistema išskaidoma į dvi nepriklausomas paparstųjų netiesinių bangų lygtis:

$$\frac{\partial R^{\pm}}{\partial T} \pm \beta (R^{\pm})^2 \frac{\partial R^{\pm}}{\partial y^{\pm}} = 0. \tag{16}$$

Pastebėkime, kad gautą (16) lygtį keitiniu $w(x,t) = \beta(R^{\pm}(x,t))^2$ galima pertvarkyti į klasikinę Hopfo lygtį (dar vadinamą Rymano arba Oilerio lygtimi) $w_t + ww_x = 0$.

Sudėtingesnis yra periodinis uždavinys. Jei (14) funkcijos yra periodinės su periodu 2π, vidurkinimo operatorius (9) ir (10) galima pakeisti integralais baigtiniame intervale ir suvidurkintoji (13) sistema užrašoma taip:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R^+}{\partial T} + \beta (R^+)^2 \frac{\partial R^+}{\partial y^+} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial R^-(T, y^+ - 2s)}{\partial y^-} \cos\bigl(\omega(y^+ - s)\bigr)\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{\partial R^+}{\partial y^+} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^-)^2 (T, y^+ - s)\,\mathrm{d}s, \\
\frac{\partial R^-}{\partial T} - \beta (R^-)^2 \frac{\partial R^-}{\partial y^-} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial R^+(T, y^- + 2s)}{\partial y^+} \cos\bigl(\omega(y^- + s)\bigr)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{\partial R^-}{\partial y^-} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^+)^2 (T, y^- + s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{17}$$

Integralinė diferencialinė (17) sistema gali atrodyti sunkesniu, palyginus su pradiniu, uždaviniu. Tačiau ji neturi asimptotinio integravimo ilgame laiko intervale specifikos ir gali būti sprendžiama skaitiniais metodais kompaktinėje kintamųjų srityje

$$(T, y^+, y^-) \in [0, T_0] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

Kai ω nėra sveikasis skaičius, (17) sistemos integralai, turintys kosinusus, lygūs nuliui, tačiau kiti du integralai lieka sistemoje (plg. [3–5]). Skirtuminės schemos panašioms suvidurkintoms sistemoms buvo pasiūlytos darbuose [3–5], tačiau tarp ten išnagrinėtų pavyzdžių nebuvo atvejo, kai sistemos koeficientai priklauso nuo nežinomų funkcijų $R^{\pm}(T, y^{\pm})$ kvadratų $(R^+)^2$ ir $(R^-)^2$. Tai yra uždavinio esminis ypatumas, kadangi nepriklausomai nuo koeficiento ω, sistema turi dvi priklausomas lygtis.

Taigi šiame darbe gauta nauja suvidurkintoji sistema asimptotiniam sprendiniui konstruoti ir šios sistemos tyrimas yra mūsų tolimesnių tyrimų objektas.

Literatūra

1. P. Miškinis, *Netiesiniai ir nelokaliniai integruojamieji modeliai*, Technika, Vilnius (2003).
2. A. Krylovas, Substantiation of the method of internal averaging along the characteristics of weakly nonlinear systems. I, *Liet. Mat. Rink.*, **29**(4), 721–732 (1989); II, *Liet. Mat. Rink.*, **30**(1), 88–100 (1990).
3. A. Krylovas, R. Ciegis, Asymptotic approximation of hyperbolic weakly nonlinear systems, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**(4), 458–470 (2001).

4. A. Krylovas, R. Čiegis, Examples of asymptotical analysis of hyperbolic equations, in: *Mathematics in Industry – ECMI Subseries*, vol. 4, Springer-Verlag, Heidelberg (2003), pp. 321–326.
5. A. Krylovas, R. Čiegis, A review of numerical asymptotic methods for weakly nonlinear hyperbolic waves, *Math. Model. Anal.*, **9**(3), 209–222 (2004).

SUMMARY

A. Krylovas, P. Miškinis. Nonlinear oscillations of the absolute elastic weightless string. Asymptotics construction

The mathematical model of string nonlinear oscillations is presented. To find the asymptotic solution of the problem an averaging scheme is constructed.

Keywords: nonlinear waves, perturbation methods, modeling.