Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.*, 2007, 95–103

Признаки принадлежности функций к классам $K_n(D)$ и $Q_n(D)$

Евгений КИРЬЯЦКИЙ, Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt, ekira@post.omnitel.net

Резюме. В работе с помощью разделенных и конечных разностей даются определения классов $K_n(D)$ и $Q_n(D)$ голоморфных в области D функций. Изучаются различные свойства функций из этих классов, устанавливаются признаки принадлежности функций к упомянутым классам.

Ключевые слова: голоморфная функция, класс функций, разделенная и конечная разности, производная.

1. Пусть D – односвязная область комплексной плоскости. Определим n-ую разделенную разность голоморфной в области D функции $F(z)$ формулой

$$[F(z);\ z_0,\dots,z_n] = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi-z_0)\dots(\xi-z_n)},$$

где Γ – простой замкнутый контур, лежащий в области D и охватывающий все точки $z_0,\dots,z_n\in D$ (см. [1]). Если D – выпуклая область (обозначим $\overset{\prime}{D}$), то для разделенной разности справедливо также представление (см. [1])

$$[F(z);\ z_0,\dots,z_n] = \int_0^1\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta)\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n,$$

где $z_0,\dots,z_n\in \overset{\prime}{D}$ и

$$\zeta = (1-t_1)z_0+(t_1-t_2)z_1+\dots+(t_{n-1}-t_n)z_{n-1}+t_nz_n\in \overset{\prime}{D},$$
$$0\leqslant t_1\leqslant 1,\ 0\leqslant t_2\leqslant t_1,\dots,\ 0\leqslant t_n\leqslant t_{n-1}.$$

В случае попарно различных точек $z_0,\dots,z_n\in D$ разделенную разность можно определить рекуррентной формулой (см. [2])

$$[F(z);z_0,\dots,z_n]=\frac{[F(z);z_0,\dots,z_{n-1}]-[F(z);z_1,\dots,z_n]}{z_0-z_n},\quad [F(z);z_0]=F(z_0).$$

В частности,

$$[F(z);\ z_0, z_1] = \frac{[F(z);\ z_0] - [F(z);\ z_1]}{z_0 - z_1} = \frac{F(z_0) - F(z_1)}{z_0 - z_1}. \tag{1}$$

Можно показать, что если $[F(z);\ z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ при попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in D$, то $[F(z);\ z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, \ldots, z_n \in D$ (см. [3]).

Обозначим через $K_n(D)$, $n \geqslant 1$, класс голоморфных в D функций $F(z)$, для которых $[F(z);\ z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in D$ (см. [3]). Как видно из (1), класс $K_1(D)$ состоит из всех однолистных в области D функций. Нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 1. *Если $F(z) \in K_n(D)$ и $z_1, \ldots, z_{n-1}$ произвольно фиксированые точки в области D, то разделенная разность $[F(z);\ z, z_1, \ldots, z_{n-1}]$ является однолистной в D функцией от z.*

Лемма 2. *Если $F(z) \in K_n(D)$, то*

$$(c\xi + d)^{n-1} F\Big(\frac{a\xi + b}{c\xi + d}\Big) \in K_n(D^*),$$

где прообраз области D при отображении

$$z = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Лемма 3. *Если $F(z) \in K_n(D)$, то $F^{(n)}(z) \neq 0$ в области D.*

2. В качестве области D возьмем полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$, которую обозначим Π. Очевидно, Π – выпуклая область. Пусть Π^+ множество точек, полученное присоединением к Π всех точек мнимой оси, за исключением точки $\zeta = 0$.

Обозначим через $\Delta_1[F(z);\ z;\ \zeta_1] = F(z + \zeta_1) - F(z)$ конечную разность первого порядка функции $F(z)$, где $z \in \Pi$, $\zeta_1 \in \Pi^+$. Заметим, что если $z \in \Pi$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \Pi^+$, то $z + \zeta_1 + \ldots + \zeta_n \in \Pi^+$. Определим конечную разность n-го порядка рекуррентным соотношением

$$\Delta_n[F(z);\ z;\ \zeta_1, \ldots, \zeta_n] = \Delta_1\big[\Delta_{n-1}\big[F(z);\ z;\ \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}\big];\ z;\ \zeta_n\big],$$

где $z \in \Pi$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \Pi^+$. Например, для второй конечной разности имеем

$$\begin{aligned}\Delta_2[F(z);\ z;\ \zeta_1, \zeta_2] &= \Delta_1\big[\Delta_{n-1}[F(z);\ z;\ \zeta_1];\ z;\ \zeta_2\big] \\ &= \Delta_1[F(z + \zeta_1) - F(z);\ z;\ \zeta_2] \\ &= F(z + \zeta_1 + \zeta_2) - F(z + \zeta_2) - F(z + \zeta_1) + F(z).\end{aligned}$$

Учитывая рекуррентное соотношение, можно по индукции вывести формулу:

$$\Delta_n\,[F(z);\; z;\; \zeta_1,\ldots,\zeta_n] = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m M_n^m(z), \quad \text{где}$$

$$M_n^m(z) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{n-m}\leqslant n} F(z+\zeta_{i_1}+\ldots+\zeta_{i_{n-m}}).$$

Познакомимся еще с интегральным представлением конечной разности.

ТЕОРЕМА 1. *Конечную разность n-го порядка голоморфной в* Π *функции $F(z)$ можно представить в виде*

$$\Delta_n\,[F(z);\; z,\zeta_1,\ldots,\zeta_n] = \zeta_1,\ldots,\zeta_n \int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 F^{(n)}(\xi)\,\mathrm{d}t_1\ldots\,\mathrm{d}t_n, \tag{2}$$

где $z\in\Pi$, $\zeta_1,\ldots,\zeta_n\in\Pi^+$ *и* $\xi = z+\zeta_1t_1+\ldots+\zeta_nt_n\in\Pi$.

Доказательство. Если $n=1$, то формула (2) верна. Действительно,

$$\Delta_1[F(z);\; z,\zeta_1] = F(z+\zeta_1)-F(z) = \int_z^{z+\zeta_1} F'(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Делая в последнем интеграле замену $\xi = z+\zeta_1t_1,\ 0\leqslant t\leqslant 1$, получим

$$\Delta_1\,[F(z);\; z,\zeta_1] = \zeta_1\int_0^1 F'(z+\zeta_1t_1)\,\mathrm{d}t_1.$$

Предположим, что формула (2) справедлива для $n=k$, т.е.

$$\begin{aligned}\Phi_k(z) &= \Delta_k\,[F(z);\; z,\zeta_1,\ldots,\zeta_k]\\ &= \zeta_1\ldots\zeta_k\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 F^{(k)}(z+\zeta_1t_1+\ldots+\zeta_kt_k)\,\mathrm{d}t_1\ldots\,\mathrm{d}t_k.\end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}&\Delta_{k+1}\big[F(z);\; z,\zeta_1,\ldots,\zeta_k,\zeta_{k+1}\big] = \Delta_1\big[\Delta_k\,[F(z);\; z;\; \zeta_1,\ldots,\zeta_k];\; z,\zeta_{k+1}\big]\\ &= \zeta_{k+1}\int_0^1 \Phi'(z+\zeta_{k+1}t_{k+1})\,\mathrm{d}t_{k+1}\\ &= \zeta_1\ldots\zeta_{k+1}\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 F^{(k+1)}(z+\zeta_1t_1+\ldots+\zeta_{k+1}t_{k+1})\,\mathrm{d}t_1\ldots\,\mathrm{d}t_{k+1},\end{aligned}$$

и наша формула (2) справедлива для $n=k$. Теорема 1 доказана.

Обозначим через $Q_n(\Pi)$, $n \geqslant 1$, класс голоморфных в Π функций $F(z)$, для которых $\Delta_n[F(z);\, z;\, \zeta_1, \dots, \zeta_n] \neq 0$ при любом $z \in \Pi$ и любых $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \Pi^+$ (см. [4]).

ЛЕММА 4. *Класс $Q_1(\Pi)$ совпадает с классом $K_1(\Pi)$.*

ЛЕММА 5. *Если $F(z) \in Q_n(\Pi)$, то функция $F^{(n-1)}(z)$ однолистная в Π.*

3.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\operatorname{Re}\{F^{(n)}(z)\} > 0$ при любом $z \in \acute{D}$, то $F(z) \in K_n(\acute{D})$.*

Доказательство. При любых $z_0, ..., z_n \in \acute{D}$ имеем

$$\operatorname{Re}\,\{[F(z);\, z_0, \dots, z_n]\} = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re}\{F^{(n)}(\zeta)\}\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n > 0.$$

Отсюда $[F(z);\, z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, \dots, z_n \in \acute{D}$ и поэтому $F(z) \in K_n(\acute{D})$.

ТЕОРЕМА 3. *Если для голоморфной в Π функции $F(z)$ выполняется условие $\operatorname{Re}\{F^{(n)}(z)\} > 0$ при любом $z \in \Pi$, то $F(z) \in Q_n(\Pi)$.*

Доказательство. При любом $z \in \Pi$ и любых $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \Pi^+$ имеем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\zeta_1\zeta_2 \dots \zeta_n} \Delta_n\,[F(z);\, z, \zeta_1, \dots, \zeta_n]\right\} \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^1 \dots, \int_0^1 \operatorname{Re}\left\{F^{(n)}(z + \zeta_1 t_1 + \dots, + \xi_n t_n)\right\} \mathrm{d}t_1 \dots, \mathrm{d}t_n > 0.
\end{aligned}$$

Отсюда $\Delta_n[F(z);\, z, \zeta_1, \dots, \zeta_n] \neq 0$ и поэтому $F(z) \in Q_n(\Pi)$.

Существуют функции, принадлежащие нескольким классам $Q_n(\Pi)$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $n \geqslant 2$. Многочлен $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots, + a_0$, где $\operatorname{Re} a_{n-1} \geqslant 0$, принадлежит одновременно двум классам $Q_n(\Pi)$ и $Q_{n-1}(\Pi)$, и не принадлежит классу $Q_k(\Pi)$, если k – натуральное число, отличное от чисел $n-1$ и n.*

Доказательство. Имеем $\operatorname{Re} P_n^{(n)}(z) \equiv n! > 0$. На основании теоремы 1 получим, что $P_n(z) \in Q_n(\Pi)$. Далее, имеем

$$\frac{1}{(n-1)!} \operatorname{Re} P_n^{(n-1)}(z) = nz + \operatorname{Re} a_{n-1} > 0$$

при любом $z \in \Pi$. По теореме 1 получим $P_n(z) \in Q_{n-1}(\Pi)$. Если $k > n$, то

$$\Delta_k[P_n(z);\ z, \zeta_1, \dots, \zeta_n] \equiv 0 \quad \text{и } P_n(z) \notin Q_k(\Pi).$$

Пусть теперь $1 \leqslant k < n-1$ и, вопреки нашему утверждению, $P_n(z) \in Q_k(\Pi)$. Тогда по лемме 5 многочлен $P_n^{(k-1)}(z)$ будет однолистной функцией в Π. Кроме того, $P_n^{(k-1)}(z)$ является многочленом степени $n-k+1 > 2$. Но однолистного в полуплоскости Π многочлена степени выше второй не существует (см [5]). Получили противоречие. Таким образом, если k — натуральное число и $k \neq n-1,\ n$, то $P_n(z) \notin Q_k(\Pi)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $n \geqslant 2$. Многочлен $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, где $\operatorname{Re} a_{n-1} \geqslant 0$, принадлежит одновременно двум классам $K_n(\Pi)$ и $K_{n-1}(\Pi)$, и не принадлежит классу $K_k(\Pi)$, если k — натуральное число, отличное от чисел $n-1$ и n.*

Доказательство. Имеем $\operatorname{Re} P_n^{(n)}(z) \equiv n! > 0$. На основании теоремы 2 получим, что $P_n(z) \in K_n(\Pi)$. Далее, имеем

$$\frac{1}{(n-1)!}\operatorname{Re} P_n^{(n-1)}(z) = nz + \operatorname{Re} a_{n-1} > 0$$

при любом $z \in \Pi$. По теореме 2 получим $P_n(z) \in K_{n-1}(\Pi)$. Если $k > n$, то

$$[P_n(z);\ z_0, z_1, \dots, z_n] \equiv 0 \quad \text{и } P_n(z) \notin K_k(\Pi).$$

Пусть теперь $1 \leqslant k < n-1$ и, вопреки нашему утверждению, $P_n(z) \in K_k(\Pi)$. Тогда по лемме 1 функция $\Psi(z) = [P_n(z);\ z, z_1, \dots, z_{k-1}]$ будет однолистной в Π при любых фиксированных $z_1, \dots, z_{k-1} \in \Pi$. Кроме того, легко понять, что эта функция является многочленом степени $n-k+1 > 2$. Но однолистного в полуплоскости Π многочлена степени выше второй не существует (см [5]). Получили противоречие. Таким образом, если k — натуральное число и $k \neq n-1,\ n$, то $P_n(z) \notin K_k(\Pi)$. Теорема доказана.

Функция $F_1(z) = \ln z \in Q_j(\Pi),\ j = 1, 2, 3$. В самом деле, легко убедиться, что

$$\Delta_1[F_1(z);\ z;\ \zeta_1] = \ln\Big(1 + \frac{\zeta_1}{z}\Big) \neq 0, \quad \forall z \in \Pi,\ \forall \zeta_1 \in \Pi^+,$$

$$\Delta_2[F_1(z);\ z;\ \zeta_1, \zeta_2] = \ln\Big(1 - \frac{\zeta_1\zeta_2}{(z+\zeta_1)(z+\zeta_2)}\Big) \neq 0, \quad \forall z \in \Pi,\ \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \Pi^+,$$

$$\Delta_3[F_1(z);\ z;\ \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] = \ln\Big(1 + \frac{\zeta_1\zeta_2\zeta_3(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+2z)}{z(z+\zeta_1+\zeta_2)(z+\zeta_1+\zeta_3)(z+\zeta_2+\zeta_3)}\Big) \neq 0,$$

$$\forall z \in \Pi,\ \forall \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \Pi^+.$$

Однако, функция $F_1(z) = \ln z \notin Q_j(\Pi)$, где $j \geqslant 4$. Это объясняется тем, что функция $F_1^{(j-1)}(z)$ не является однолистной в Π при любом $j \geqslant 4$ (см. лемму 5).

Функция $F_2(z) = 1/z \in Q_j(\Pi)$, $j = 1, 2$. Действительно, легко понять, что

$$\Delta_1[F_2(z);\ z;\ \zeta_1] = \frac{1}{z+\zeta_1} - \frac{1}{z} = \frac{-\zeta_1}{(z+\zeta_1)z} \neq 0, \quad \forall z \in \Pi,\ \forall \zeta_1 \in \Pi^+,$$

$$\Delta_2[F_2(z);\ z;\ \zeta_1, \zeta_2] = \frac{1}{z+\zeta_1+\zeta_2} - \frac{1}{z+\zeta_1} - \frac{1}{z+\zeta_2} + \frac{1}{z}$$

$$= \frac{\zeta_1\zeta_2(2z+\zeta_1+\zeta_2)}{(z+\zeta_1+\zeta_2)(z+\zeta_1)(z+\zeta_2)z} \neq 0.$$

Однако, функция $F_2(z) \notin Q_j(\Pi)$, где $j \geqslant 3$. Это объясняется тем, что функция $F_1^{(j-1)}(z)$ не является однолистной в Π при любом $j \geqslant 3$ (см. лемму 5).

Отметим, что та же функция $F_2(z)$ принадлежит одновременно всем классам $K_n(\Pi)$, $n = 1, 2, 3$. В самом деле,

$$[F_2(z);\ z_0, \dots, z_n] = \frac{(-1)^n}{z_0, \dots, z_n} \neq 0, \quad \forall z_0, \dots, z_n \in \Pi.$$

Функция $F_4(z) = \mathrm{e}^z$ не может принадлежать ни одному из классов $Q_n(\Pi)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Это следует из того, что если, например, взять $\zeta_m = 2\pi i$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, то при любом натуральном n имеем

$$\Delta_n[F_4(z);\ z;\ \zeta_1, \dots, \zeta_n] = e^z \prod_{k=1}^{n} (e^{\zeta_k} - 1) = 0.$$

Функция $F_4(z) = \mathrm{e}^z$ принадлежит всем классам $K_n(H)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где H – любая выпуклая область, в которой $\operatorname{Re} F_4^{(n)}(z) = \operatorname{Re} F_4(z) > 0$ (см. теорему 2).

Обладающая многими замечательными свойствами, функция Кебе (см.[6])

$$F_3(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots,$$

принадлежит всем классам $K_n(\Pi)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. В самом деле,

$$[F_3(z);\ z_0, \dots, z_n] = \Big(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-z_m}\Big) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-z_m} \neq 0,$$

$$\forall z_0, \dots, z_n \in E,\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Замечание 1. При определении конечной разности n-го порядка и определении класса $Q_n(\Pi)$ существенным является то, что параметры

$\zeta_1, \dots, \zeta_n$ могут принимать любые значения, расположенные на мнимой оси, за исключением начала координат, т.е. $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \Pi^+$.

Учитывая замечание 1, в работе [7] получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *Не существует голоморфной в* Π *функции* $F(z)$, *которая одновременно принадлежала бы первым шести классам* $Q_j(\Pi)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Следствие 1. *Не существует голоморфной в* Π *функции* $F(z)$, *для которой одновременно выполнялось бы условие* $\operatorname{Re} F^{(j)}(z) > 0$ *в* Π *для* $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Замечание 2. Есть все основания утверждать, что в теореме 6 можно взять $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Доказать или опровергнуть это утверждение пока не удалось. Возникла задача об отыскании функции, для которой первые четыре или пять конечных разностей отличны от нуля при любом $z \in \Pi$ и любых $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \Pi^+$.

Замечание 3. Если $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ взяты из множества, отличного от множества Π^+, то существуют функции, у которых конечные разности всех порядков отличны от нуля. Например, для целой функции $F_4(z) = e^z$ имеем

$$\Delta_n\,[F_4(z);\ z;\ \zeta_1, \dots, \zeta_n] = e^z \prod_{k=1}^{n} (e^{\zeta_k} - 1) \neq 0,$$

при любом z, и любых $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, среди которых нет чисел вида $2\pi i p$, $p = 0, 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* E — *круг* $|z| < 1$. *Если для голоморфной в* E *функции вида*

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_{k,n} z^{n+k-1}, \tag{3}$$

выполняется условие

$$\sum_{k=2}^{\infty} B^n_{n+k-1} |b_{k,n}| \leqslant 1, \quad \text{где } B^s_l = \frac{s!}{l!(s-l)!}, \tag{4}$$

то $F(z) \in K_n(E)$. *Если для функции* $\Psi(z)$ *вида* (3) *выполняется условие*

$$\sum_{k=2}^{\infty} B^n_{n+k} |b_{k,n}| > 1, \tag{5}$$

то

$$\Psi(z) = z^n - \sum_{k=2}^{\infty} |b_{k,n}| \notin \tilde{K}_n(E).$$

Доказательство. Пусть для функции $F(z)$ вида (3) выполнено условие (4). Тогда при любом $z \in E$ имеем

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{n!}F^{(n)}(z)\right\} = 1 + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} B_{n+k}^{n} b_{k+1,n} z^k\right\} > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_{n+k}^{n} |b_{k+1,n}| \geqslant 0.$$

Применяя теорему 2, получим $F(z) \in K_n(E)$. Пусть теперь для некоторой функции $\Psi(z)$ вида (3) выполняется условие (5). Тогда

$$\frac{1}{n!}\Psi^{(n)}(z) = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^{n} |b_{k,n}| z^{k-1}, \quad \frac{1}{n!}\Psi^{(n)}(0) = 1.$$

Из условия (5) следует, что для вещественных значений x, достаточно близких к единице, будет $\frac{1}{n!}\Psi^{(n)}(x) < 0$. Значит, существует такое число $x_0,\ 0 < x_0 < 1$, что $\frac{1}{n!}\Psi^{(n)}(x_0) = 0$. Но тогда по лемме 3 $\Psi(z) \notin K_n(E)$.

ТЕОРЕМА 8. *Если для голоморфной в* Π *функции*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n}(z-1)^{n+k}, \quad \text{где } a_{1,n} = 1,$$

выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{n+k}^{n} \left| \sum_{m=0}^{k} 2^m B_k^m a_{m+1,n} \right| \leqslant 1, \quad a_{1,n} = 1, \tag{6}$$

то $F(z) \in K_n(\Pi)$.

Доказательство. Функция $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ взаимно однозначно отображает полуплоскость Π на единичный круг E. Определим в E функцию

$$G(\omega) = \frac{1}{2^n}(1-\omega)^{n-1} F\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,n}\omega^{n+k}.$$

Легко установить, что

$$b_{k+1,n} = \sum_{m=0}^{k} 2^m B_k^m a_{m+1,n}, \quad \text{где } b_{1,n} = a_{1,n} = 1.$$

Теперь условие (6) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{n+k}^{n} |b_{k+1,n}| \leqslant 1.$$

Из теоремы 7 следует, что $G(\omega) \in K_n(E)$. Теперь, опираясь на лемму 2, получим

$$F(z) = 2(z+1)^{n-1} G\Big(\frac{z-1}{z+1}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n}(z-1)^{n+k} \in K_n(\Pi).$$

Литература

1. И.И. Ибрагимов, *Методы интерполяции функций и некотрые их применения*, Наука, Москва (1971).
2. А.О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Гостехиздат, Москва (1952).
3. Э.Г. Кирьяцкий, О функциях с отличной от нуля разделенной разностью, *Лит. мат. сборник*, **3**(1), 157–168 (1963).
4. Е.Э. Кирьяцкий, О функциях с отличной от нуля конечной разностью, *Лит. мат. сборник*, **30**(2), 275–287 (1990).
5. М.А. Евграфов, *Сборник задач по теории аналитических функций*, Наука, Москва (1972).
6. И.А. Александров, *Методы геометрической теории аналитических функций*, Томский государственный университет, Томск (2001).
7. Э.Г. Кирьяцкий, Е.Э. Кирьяцкий, Об однолистных в полуплоскости функциях с отличными от нуля конечными разностями, *Вестник Томского университета*, **288**, 60–65 (2005).

REZIUMĖ

E. Kirjackis, E. Kirjackis. Funkcijų priklausomybės klasėms $F_n(D)$ ir $Q_n(D)$ požymiai

Darbe remiantis padalytais ir baigtiniais skirtumais apibrėžiamos holomorfinių srityje D funkcijų klasės $F_n(D)$ ir $Q_n(D)$. Nagrinėjamos įvairios šių klasių funkcijų savybės, nustatyti funkcijų priklausomybės minėtoms klasėms kriterijai.

SUMMARY

J. Kirjackis, E. Kirjackis. The tests of the belonging of functions to the classes $F_n(D)$ and $Q_n(D)$

In the work with the aid of the divided and finite differences are introduced classes $F_n(D)$ and $Q_n(D)$ of functions holomorphic in region D. Different properties of functions from these classes are studied, the tests of the belonging of functions to the mentioned classes are established.

Keywords: holomorphic function, class of functions, divided and finite differences, derivative.