Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.*, 2007, 259–267

Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados’07 uždavinių apžvalga

Juozas Juvencijus MAČYS (MII)
el. paštas: jmacys@ktl.mii.lt

56-oji Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada įvyko Vilniuje 2007 m. balandžio 3 d. Apžvelgsime olimpiados uždavinius.

IX–X klasės

1. *Vienetinio kvadrato viršūnėse tupi 4 blusos. Kiekvienu ėjimu viena blusa gali peršokti per bet kurią kitą. Blusa A, peršokusi per blusą B, nusileidžia toje pačioje tiesėje AB, o atstumas tarp jų lieka toks pat. Ar gali jos taip šokinėdamos po baigtinio ėjimų skaičiaus atsidurti*

a) kvadrato 2×2 *viršūnėse*?

b) kurio nors nevienetinio kvadrato viršūnėse?

Atsakymas. a) Negali; b) negali.

Sprendimas. Aišku, kad jei blusos iš kvadrato 1×1 gali sušokinėti į kvadratą $a \times a$, tai jos gali sušokinėti ir atgal. Akivaizdu, kad blusos gali patekti tik į gardelės, sudarytos iš kvadratų 1×1, mazgus, o kadangi mažiausias atstumas tarp mazgų lygus 1, tai mazgai negali sudaryti kvadrato su kraštine $a < 1$. Analogiškai, sudarius gardelę iš kvadratų $a \times a$, $a > 1$, mažiausias atstumas tarp jos mazgų bus lygus a, taigi mazgai negali sudaryti vienetinio kvadrato.

2. *Seka* (a_n) *su visais natūraliaisiais* n *tenkina sąlygą* $n^2 a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. *Duota, kad* $a_1 = 1002$. *Raskite* a_{2006}.

Atsakymas. $2004/(2006 \cdot 2007) \quad (= 334/(1003 \cdot 669))$.

Sprendimas. Pirmas būdas. Kadangi sąlyga tenkinama su visais n, tai nesunku apskaičiuoti keletą pirmųjų sekos narių. Kai $n = 2$, gauname $2^2 a_2 = a_1 + a_2$, $3a_2 = a_1$, $a_2 = a_1/3$ (reikšmės $a_1 = 1002$ galima ir neįstatinėti). Kai $n = 3$, tai $9a_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $8a_3 = a_1 + a_1/3$, $a_3 = a_1/6$. Kai $n = 4$, tai $16a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $15a_4 = a_1 + a_1/3 + a_1/6$, $90a_4 = 6a_1 + 2a_1 + a_1$, $a_4 = a_1/10$. Panašiai randame $a_5 = a_1/15$, $a_6 = a_1/21$. Pastebime, kad $a_2 = 2a_1/(2\cdot3)$, $a_3 = 2a_1/(3\cdot4)$, $a_4 = 2a_1/(4\cdot5)$, $a_5 = 2a_1/(5\cdot6)$.

Spėjame, kad teisinga formulė $a_k = 2a_1/(k(k+1))$. Įrodysime ją indukcijos metodu. Keletui k reikšmių ji jau įrodyta. Lieka įrodyti, kad tarus, jog ji teisinga su $k = 2, 3, 4, \ldots, n-1$, ji teisinga ir su $k = n$. Iš tikrųjų,

$$n^2 a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = 2a_1\bigl(1/(1\cdot2) + 1/(2\cdot3) + \cdots + 1/((n-1)n)\bigr) + a_n.$$

Bet suma skliaustuose lygi

$$(2-1)/(1{\cdot}2)+(3-2)/(2{\cdot}3)+\cdots+(n-(n-1))((n-1)n)$$
$$=(1-1/2)+(1/2-1/3)+\cdots+(1/(n-1)-1/n)=1-1/n=(n-1)/n,$$

todėl $(n^2-1)a_n=2a_1(n-1)/n$, ir $a_n=2a_1/(n(n+1))$.

Taigi ši formulė įrodyta visiems n. Įstatę $a_1=1002$ ir $n=2006$, randame $a_{2006}=2004/(2006{\cdot}2007)=334/(1003{\cdot}669)$.

Antras būdas. Iš lygybės $n^2a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$ atėmę lygybę $(n-1)^2a_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$, gauname $n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}=a_n$, $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$, $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$, $a_n=(n-1)a_{n-1}/(n+1)$.

Ši lygybė teisinga su visais n. Parašome ją su visais indeksais iki n: $a_2=a_1/3$, $a_3=2a_2/4$, $a_4=3a_3/5$, $a_5=4a_4/6$, …, $a_{n-2}=(n-3)a_{n-3}/(n-1)$, $a_{n-1}=(n-2)a_{n-2}/n$, $a_n=(n-1)a_{n-1}/(n+1)$, ir visas jas sudauginame:

$$a_2a_3a_4a_5\dots a_{n-1}a_n$$
$$=1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}(n-2)(n-1)a_1a_2a_3a_4\dots a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}/(3{\cdot}4{\cdot}\ldots{\cdot}(n-1)n(n+1)).$$

Suprastiname: $a_n=1{\cdot}2{\cdot}a_1/(n(n+1))$. Liko įstatyti a_1 ir n reikšmes.

Žinoma, galima apsieiti ir be trupmenų – lygybę $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$ parašyti ir su visais mažesniais indeksais, o gautas lygybes sudauginti.

3. *Turime lygtį*

$$x^{17}+y^{17}+z^{17}-x^{10}y^7-y^{10}z^7-z^{10}x^7=1. \tag{1}$$

a) Nurodykite bent 4 lygties sprendinius;
b) raskite visus tokius sprendinius (x,y,z), *kad* $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

Atsakymas. a) Pavyzdžiui, $(1/\sqrt[17]{130944}, 2/\sqrt[17]{130944}, 0)$, $(1,-1,0)$ ir jų ciklinės perstatos, taip pat b) punkto sprendiniai; b) $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ ir jų perstatos – iš viso 6 sprendiniai.

Sprendimas. a) Kadangi kintamųjų „daug“, galime imti $y=0$, $z=0$. Gauname lygtį $x^{17}=1$, iš jos $x=1$. Taigi vienas sprendinys $(1,0,0)$, bet aiškūs dar du sprendiniai: $(0,1,0)$ ir $(0,0,1)$. Ieškokime daugiau sprendinių, imkime $z=0$. Tada (1) lygtis virsta $x^{17}+y^{17}-x^{10}y^7=1$, ir paprasčiausia imti, pavyzdžiui, $y=1$. Tada $x^{17}-x^{10}=0$, $x^{10}(x^7-1)=0$, $x=0$ arba $x=1$. Pirma reikšmė duoda jau turėtą sprendinį, o $x=1$ duoda sprendinį $(1,1,0)$, ir aiškūs dar du sprendiniai $(0,1,1)$ ir $(1,0,1)$. Jau turime 6 sprendinius.

Nereikia manyti, kad sunku rasti kitokių sprendinių. Vėl imkime $z=0$. Jei imsime $y=x$, tai naujų sprendinių negausime. Bet galima imti, pavyzdžiui, $y=2x$. Tada $x^{17}+2^{17}x^{17}-2^7x^{17}=1$, $x^{17}(2^{17}-2^7+1)=1$, $x=1/\sqrt[17]{130944}$, ir gauname sprendinį $(1/\sqrt[17]{130944}, 2/\sqrt[17]{130944}, 0)$ ir du kitus. Imdami $y=-x$, gauname $x=1$, ir turime sprendinį $(1,-1,0)$. Sudėtingiau, jei imame $z=0$, $y=-1$. Tada $x^{17}+x^{10}=2$, $x^{10}(x^7+1)=2$. Šiai lygčiai tinka $x=1$, ir nesunku įrodyti, kad daugiau sprendinių nėra: kai $x>1$, tai kairė pusė didesnė už 2; kai $-1\leqslant x<1$, kairė mažesnė už 2; pagaliau, kai $x < -1$, tai kairė pusė neigiama. Taigi vėl gavome sprendinį $(1, -1, 0)$.

b) Žinoma, punkto a) buvo galima ir nespręsti, o iš karto pereiti prie punkto b). Beje, jau žinome 6 sprendinius, tenkinančius punkto b) sąlygas.

Dažnai padaroma tokia nedovanotina klaida: pasakoma, kad mūsų lygtis simetrinė (t.y. kad sukeitę bet kuriuos du kintamuosius, gausime tą pačią lygtį). Tai ne taip: pavyzdžiui, su $x = 1/2$, $y = 1/4$, $z = 0$ lygties (1) kairė pusė lygi $1/2^{17} + 1/2^{34} - 1/2^{24}$, o su $x = 1/4$, $y = 1/2$, $z = 0$ lygi $1/2^{34} + 1/2^{17} - 1/2^{27}$. Todėl teiginys „kadangi lygtis simetrinė, tai x galime laikyti didžiausiu" nepagrįstas, o sprendimas klaidingas.

Bet (1) lygtis yra ciklinė. Tai reiškia, kad iksą pakeitus ygreku (trumpiau: $x \to y$), ygreką – zetu, o zetą – iksu, lygtis nepasikeis. Galima ir dar kartą pastumti kintamuosius: $y \to z$, $z \to x$, $x \to y$, ir vėl (1) lygtis nepakis, tik bus pakeista $x \to z$, $y \to x$, $z \to y$ (tą patį gautume pasukę kintamuosius prieš laikrodžio rodyklę vienu žingsniu). Vadinasi, jeigu (a, b, c) yra (1) lygties sprendinys, tai sprendiniai yra ir (b, c, a) bei (c, a, b). Todėl ir ciklinės lygties atveju galima laikyti, kad x didžiausias (priešingu atveju pakeistume kintamuosius taip, kad didžiausiu taptų x). Tada arba $y \leqslant z$, arba $y \geqslant z$, ir turime 2 atvejus: 1) $x \geqslant z \geqslant y$ ir 2) $x \geqslant y \geqslant z$ (nieko blogo, kad atvejis $y = z$ nagrinėjamas abu kartus).

Perrašykime lygtį taip:

$$x^{10}(x^7 - y^7) + y^{10}(y^7 - z^7) + z^{10}(z^7 - x^7) = 1. \tag{2}$$

1) atveju (2) lygties pirmi skliaustai neneigiami, o antri ir treti – neteigiami, todėl kairė pusė $\leqslant x^{10}(x^7 - y^7) \leqslant x^7 - y^7 \leqslant 1$, ir paskutinė nelygybė gali virsti lygybe tik kai $x = 1$, $y = 0$. Su šitomis reikšmėmis (2) lygtis virsta $1 + z^{10}(z^7 - 1) = 1$, t.y. $z^{10}(z^7 - 1) = 0$. Taigi $z = 0$ arba $z = 1$, ir gauname jau turėtus sprendinius $(1, 0, 0)$ ir $(1, 0, 1)$ bei jų perstatas (šių sprendinių atveju ciklinės perstatos duoda visas perstatas).

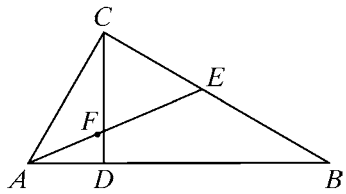
2) atveju lygties (2) kairė pusė $\leqslant x^{10}(x^7 - y^7) + y^{10}(y^7 - z^7) \leqslant (x^7 - y^7) + (y^7 - z^7) = x^7 - z^7 \leqslant 1$, ir lygybė pasiekiama tik kai $x = 1$, $z = 0$. Situacija analogiška turėtajai, ir naujų sprendinių nebegauname. Lygtis išspręsta.

Įdomu pastebėti, kad punkto a) atsakyme nurodytų sprendinių $(1, -1, 0)$ ir $\left(1/\sqrt[17]{130944}, 2/\sqrt[17]{130944}, 0\right)$ tik ciklinės perstatos yra sprendiniai (pavyzdžiui, $(-1, 1, 0)$ nėra sprendinys, nes kairė pusė tada lygi -1). Taip pat aišku, kad turi būti $2/\sqrt[17]{130944} > 1$, – juk įrodėme, kad kai $x, y, z \in [0, 1]$, tai sprendinių daugiau nėra (įsitikinti, kad $\sqrt[17]{130944} < 2$, nesunku ir tiesiogiai, nes $2^{17} > 130944$).

4. *Duotas statusis trikampis ABC, kurio statiniai $BC = a$, $AC = b$. Taškas D yra aukštinės, nuleistos iš stačiojo kampo viršūnės C į įžambinę AB, pagrindas. Statinyje BC paimtas toks taškas E, kad $CE = \frac{1}{2}BD$, o atkarpoje AE – toks taškas F, kad $EF = CE$. Raskite atkarpos AF ilgį.*

Atsakymas. $AF = b^2/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Sprendimas. Pažymėkime $BD = p$. Tada $CE = EF = p/2$. Kadangi $a^2 = pc$, tai $p = a^2/c$, $CE = EF = a^2/(2c)$. Pagal Pitagoro teoremą $c^2 = a^2 + b^2$, $AE^2 =$



1 pav. Uždavinys IX–X.3.

$AC^2 + CE^2 = b^2 + a^4/(4c^2) = (4b^2c^2 + a^4)/(4c^2)$. Bet $4b^2c^2 + a^4 = 4b^2(a^2 + b^2) + a^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^2 = (a^2 + 2b^2)^2$, todėl $AE^2 = (a^2 + 2b^2)^2/(4c^2)$, ir $AE = (a^2+2b^2)/(2c)$. Todėl $AF = AE - EF = (a^2+2b^2)/(2c) - a^2/(2c) = b^2/c = b^2/\sqrt{a^2+b^2}$.

Žinoma, p buvo galima apskaičiuoti ir remiantis Pitagoro teorema. Iš plotų formulių $CD{\cdot}c = ab$, $CD = ab/c$, todėl $p^2 = CB^2 - CD^2 = a^2 - a^2b^2/c^2 = a^2(c^2 - b^2)/c^2 = a^4/c^2$, ir $p = a^2/c$.

XI–XII klasės

1. *a) k yra sveikasis skaičius. Įrodykite, kad skaičių $(2k+1)^3 - (2k-1)^3$ galima išreikšti trijų sveikųjų skaičių kvadratų suma.*

b) n yra natūralusis skaičius. Įrodykite, kad skaičių $(2n+1)^3 - 2$ galima išreikšti suma $3n-1$ dėmenų, kurių kiekvienas yra didesnio už vienetą natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Sprendimas. a) Duotąjį reiškinį nesunku suprastinti netgi nesiremiant kubų formulėmis – užtenka sudauginti $(2k \pm 1)^2$ ir $(2k \pm 1)$. Arba taip: $(2k+1)^3 - (2k-1)^3 = (2k+1)^3 - (2k+1)^2(2k-1) + (2k+1)^2(2k-1) - (2k-1)^3 = (2k+1)^2(2k+1-2k+1) + (2k-1)\big((2k+1)^2 - (2k-1)^2\big) = 2(2k+1)^2 + (2k-1){\cdot}2{\cdot}4k = 24k^2 + 2$. Dabar aišku, kad 2 reikia „įdarbinti“ kaip du vienetus sumos ir skirtumo kvadratuose. Bet $(k+1)^2 + (k-1)^2 = 2k^2 + 2$, ir liktų $22k^2$. O štai vietoj k imant $2k$ išeina gerai: $24k^2 + 2 = (2k+1)^2 + (2k-1)^2 + (4k)^2$.

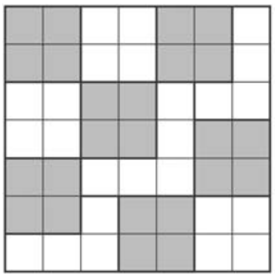
b) Galima sugudrauti ir remtis punktu a):

$$(2n+1)^3 - 2 = \big[(2n+1)^3 - (2n-1)^3\big] + \big[(2n-1)^3 - (2n-3)^3\big] + \cdots + [5^3 - 3^3] + 3^3 - 2.$$

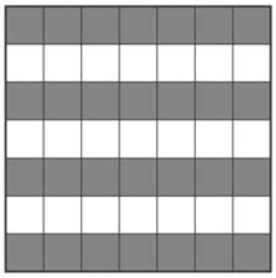
Kiekvienus iš $(n-1)$ laužtinių skliaustų galima išreikšti trijų kvadratų suma – turėsime $3n-3$ dėmenis, o $3^3 - 2 = 25 = 3^2 + 4^2$, taigi dėmenų bus $3n-1$.

2. *Baltame kvadrate 7×7, padalytame į vienetinius kvadratėlius, užtušuoti 29 kvadratėliai. Įrodykite, kad visada galima rasti „kampuką“, sudarytą iš trijų užtušuotų langelių.*

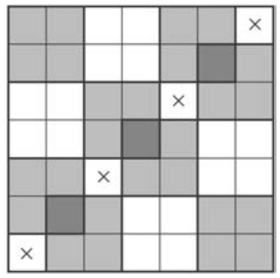
Sprendimas. Padalykime kvadratą simetriškai kvadrato įstrižainės atžvilgiu, kaip parodyta 2 pav.: į devynis kvadratus 2×2, dvi „raides L“ iš 4 langelių ir „kampą“ iš 5 langelių. Kad kvadrate 2×2 nebūtų užtušuoto kampuko, daugiausiai galima užtušuoti 2 langelius. Raidėje L galima užtušuoti tik 3 langelius, o kampe – tik 4. Taigi



2 pav. Uždavinys XI–XII.2. Devyni kvadratai 2×2.



3 pav. Uždavinys XI–XII.2. Užtušuoti 28 langeliai.



4 pav. Uždavinys XI–XII.2. Dešimt kvadratų 2×2.

iš viso galima užtušuoti daugiausiai $9{\cdot}2 + 2{\cdot}3 + 1{\cdot}4 = 28$ kvadratėlius, o užtušavus 29 – būtinai atsiras užtušuotas kampukas.

Beje, užtušavus 28 langelius, užtušuoto kampuko gali ir nebūti – pavyzdžiui, galima ištisai užtušuoti pirmą, trečią, penktą ir septintą eilutes (žr. 3 pav.). Kitaip sakant, sąlygoje 29 yra mažiausias skaičius langelių, kuriuos užtušavę būtinai rasime užtušuotą „kampuką".

Tą patį įrodymą galima atlikti prieštaros metodu, o ir kvadratą galima skaidyti kitaip. Pavyzdžiui, imkime 6 „viršutinius" kvadratus iš 2 pav. bei simetriškai ir kitos įstrižainės atžvilgiu tokius pat 6 „apatinius" kvadratus (taigi dabar kvadrato skaidinys simetriškas abiejų įstrižainių atžvilgiu). Matome, kad 3 langeliai uždengti dukart, vadinasi, tie 12 kvadratų 2×2 uždengia $12{\cdot}4 - 3 = 45$ langelius, o neuždengti lieka 4 langeliai (jie pažymėti kryželiais). Tarkime, kad užtušuoti 29 langeliai, o užtušuoto „kampuko" nėra. Kadangi kvadratai nedengia tik 4 langelių, tai jie dengia mažiausiai 25 užtušuotus langelius. Bet kvadratų yra 12, todėl pagal Dirichlė (P.G. Lejeune-Dirichlet) principą yra kvadratas, turintis ne mažiau kaip 3 užtušuotus langelius. Bet tai reiškia, kad jis turi ir užtušuotą „kampuką". Prieštara.

3. *Dvi gretimos kvadrato viršūnės yra apskritime, kurio spindulys lygus 1. Didžiausią atstumą, kuriuo kvadrato viršūnė gali būti nutolusi nuo apskritimo centro, pažymėkime M.*

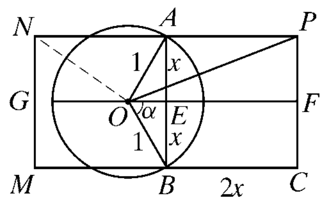
a) Įrodykite, kad $\sqrt{5} < M < \sqrt{7}$.

b) Raskite M.

Atsakymas. b) $1 + \sqrt{2}$.

Sprendimas. Prie stygos AB (žr. 5 pav.) pribrėžiame kvadratus $ABCD$ (į kitą pusę nuo stygos nei apskritimo centras O) ir $ABMN$ (į centro pusę). Nuleiskime statmenį OEF į stygą AB (ir kraštinę CD). Pažymėkime $AE = EB = x$, $\angle EOB = \alpha$. Pagal Pitagoro teoremą $OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = \sqrt{1 - x^2}$, $OD^2 = (EF + OE)^2 + FD^2 = (2x + \sqrt{1 - x^2})^2 + x^2 = 4x^2 + 4x\sqrt{1 - x^2} + 1$. Analogiškai $ON^2 = (EG - OE)^2 + GN^2 = (2x - \sqrt{1 - x^2})^2 + x^2$, todėl $ON < OD$. Mūsų uždavinys – rasti didžiausią atstumo nuo centro O iki kvadrato viršūnės reikšmę, taigi galime ieškoti OD^2 didžiausios reikšmės. Pažymėkime

$$f(x) = 4x^2 + 4x\sqrt{1 - x^2} + 1 \quad (0 < x \leqslant 1)$$



5 pav. Uždavinys XI–XII.3.

ir raskime šios funkcijos didžiausią reikšmę M^2.

Jau iš karto matome, kad kai $x = 1$, tai $f(x) = 5$, o kai $x \neq 1$, tai $f(x) = 4x^2+2\sqrt{1-(1-2x^2)^2}+1 \leqslant 4x^2+2+1 < 4+2+1 = 7$. Vadinasi, $5 \leqslant M^2 < 7$. Imdami, pavyzdžiui, $x = 0{,}8$, turime $f(0{,}8) = 4\cdot 0{,}8^2 + 4\cdot 0{,}8\sqrt{1-0{,}8^2}+1 = 4\cdot 0{,}64 + 3{,}2\cdot 0{,}6 + 1 = 2{,}56 + 1{,}92 + 1 = 5{,}48$, taigi $M^2 \geqslant 5{,}48 > 5$, ir a) klausimo nelygybė įrodyta, $\sqrt{5} < M < \sqrt{7}$.

Išvestinė $f'(x) = 8x + 2(x^2 - x^4)^{-1/2}(2x - 4x^3)$ lygi nuliui, kai $2 + (x^2 - x^4)^{-1/2}(1-2x^2) = 0$, $4(x^2-x^4) = (1-2x^2)^2$, $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$, $16x^4 - 16x^2 + 2 = 0$, $(4x^2-2)^2 = 2$, $4x^2 - 2 = \pm\sqrt{2}$, $x^2 = (2\pm\sqrt{2})/4$, $x = \sqrt{2\pm\sqrt{2}}/2$. Iš lygties $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ matome, kad su šitomis kritinėmis x reikšmėmis $x^2 - x^4 = 1/8$, todėl $f(x) = 4x^2 + 4\sqrt{x^2-x^4}+1 = 2\pm\sqrt{2}+4\sqrt{1/8}+1 = 3\pm\sqrt{2}+\sqrt{2}$, ir iš šių dviejų reikšmių didesnė reikšmė yra $f(x) = 3+2\sqrt{2}$ su $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2$.

Vadinasi, didžiausia ieškomojo atstumo reikšmė yra $M = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$ $= 1+\sqrt{2}$.

Kitas būdas. Galima apsieiti ir be išvestinių. Kadangi $EB = \sin\alpha$, $OE = \cos\alpha$, tai $OD^2 = (\cos\alpha + 2\sin\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1 + 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha = 1 + 2\sin 2\alpha + 2(1 - \cos 2\alpha) = 3 + 2(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) = 3 + 2\sqrt{2}(\sin 2\alpha \sin 45^\circ - \cos 2\alpha\cos 45^\circ) = 3 - 2\sqrt{2}\cos(2\alpha + 45^\circ)$. Didžiausią šio reiškinio reikšmę gausime, kai kosinusas lygus -1, t.y. kai $2\alpha + 45^\circ = 180^\circ$, $\alpha = 67^\circ 30'$, ir ta reikšmė lygi $3+2\sqrt{2}$. Vadinasi, didžiausia atstumo OD reikšmė yra $M = 1+\sqrt{2}$. Žinoma, akivaizdi ir nelygybė $\sqrt{5} < 1+\sqrt{2} < \sqrt{7}$, nes $5 < 3+2\sqrt{2} < 7 \iff 1 < \sqrt{2} < 2$.

4. *Funkcija $f(x)$ apibrėžta teigiamiesiems skaičiams, įgyja teigiamąsias reikšmes ir su visais teigiamaisias x ir y tenkina lygybę $f(x)f(y) = f(xy) + f(x/y)$.*

a) Nurodykite bent tris tokias funkcijas.

b) Įrodykite, kad $f(x) \geqslant 2$, $f(1) = 2$.

c) Įrodykite, kad jei $f(x)$ tenkina sąlygą, tai ją tenkina ir funkcija $f^2(x) - 2$.

Atsakymas. a) Pavyzdžiui, $f(x) = 2$, $f(x) = x + 1/x$, $f(x) = \sqrt{x} + 1/\sqrt{x}$, $f(x) = x^3 + 1/x^3$.

Sprendimas. a), b) Paėmę $x = y = 1$, turime $f(1)\cdot f(1) = f(1) + f(1)$, t.y. $f^2(1) = 2f(1)$, o kadangi f visada teigiama, tai padalijię iš $f(1)$ gauname $f(1) = 2$. Matome, kad pradinę lygtį tenkina funkcija $f(x) \equiv 2$.

Dabar pradinėje lygtyje imkime $x = 1$, tada $2f(y) = f(y) + f(1/y)$, t. y. $f(y) = f(1/y)$; žinoma, tai reiškia tą patį, ką ir $f(x) = f(1/x)$. Dabar jau nebesunku atspėti funkciją $f(x) = x + (1/x)$, ji tenkina pradinę lygtį: $(x + 1/x)(y + 1/y) = xy + 1/(xy) + x/y + y/x$. Nesunku atspėti ir $f(x) = x^2 + (1/x^2)$, taip pat $f(x) = x^\alpha + (1/x^\alpha)$, kur α – bet kuris realusis skaičius (kai $\alpha = 0$, gauname funkciją $f(x) \equiv 2$).

Visos šios funkcijos tenkina punkto b) sąlygas, nes visada $x + (1/x) = (\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})^2 + 2 \geqslant 2$. Bet mes nežinome visų pradinės lygties sprendinių, todėl reikia įrodyti, kad jei kuri nors $f(x)$ tenkina pradinę lygtį, tai $f(x) \geqslant 2$ ir $f(1) = 2$.

Imdami $y = x$, gauname lygybę

$$f^2(x) = f(x^2) + 2. \tag{3}$$

Pabrėšime, kad kiekvienam pradinės lygties sprendiniui $f(x)$ ši lygybė teisinga su visais $x > 0$, bet jeigu (3) lygtį išspręstume ir rastume visas ją tenkinančias $f(x)$, tai dar visiškai nereiškia, kad jos tenkins pradinę sąlygą.

Dabar įrodysime, kad $f(x) \geqslant 2$. Tai atlikti galima įvairiai (būdai i, ii, iii, iv).

i) Perrašykime (3) lygtį taip:

$$f(x) = \sqrt{2 + f(x^2)}. \tag{4}$$

Tai reiškia, kad su visais x teisinga (4) lygybė, todėl ji teisinga ir su x^2:

$$f(x^2) = \sqrt{2 + f(x^4)}.$$

Pakeitę (4) lygybėje $f(x^2)$ gautuoju radikalu, turime $f(x) = \bigl(2 + (2 + f(x^4))^{1/2}\bigr)^{1/2}$. Tęsdami gauname, kad $f(x) = \bigl(2 + (2 + \cdots + (2 + f(x^{2^n}))^{1/2} \cdots)^{1/2}\bigr)^{1/2}$, kur yra n dvejetų, o kadangi $f > 0$, tai

$$f(x) > \Bigl(2 + \bigl(2 + \cdots + (2 + 2^{1/2})^{1/2} \ldots\bigr)^{1/2}\Bigr)^{1/2}, \tag{5}$$

kur yra n dvejetų.

Įrodysime, kad paėmę n pakankamai didelį pastarąjį reiškinį galime padaryti kiek norint artimą 2. Tai ir reikš, kad $f(x) \geqslant 2$. Nagrinėkime seką

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \tag{6}$$

t.y. seką $2^{1/2}$, $(2 + 2^{1/2})^{1/2}$, $\bigl(2 + (2 + 2^{1/2})^{1/2}\bigr)^{1/2}, \ldots$. Jos n-tasis narys ir yra (5) nelygybės dešinės pusės reiškinys.

Remkimės ribų teorija. Matome, kad mūsų seka aprėžta, $a_n < 2$ (užtenka paskutinį radikalą $\sqrt{2}$ pakeisti 2, ir gausime 2). Seka didėja, nes $a_n > a_{n-1} \iff \sqrt{2 + a_{n-1}} > a_{n-1} \iff 2 + a_{n-1} > a_{n-1}^2 \iff a_{n-1}^2 - a_{n-1} - 2 < 0 \iff (a_{n-1} + 1)(a_{n-1} - 2) < 0 \iff a_{n-1} - 2 < 0 \iff a_{n-1} < 2$, o tuo jau įsitikinome. Vadinasi, seka a_n turi ribą. Perėję prie ribos (6) lygybėje gauname $a = \sqrt{2 + a}$, $a^2 = 2 + a$, $(a + 1)(a - 2) = 0$, ir $a = 2$. Taigi iš tikrųjų su pakankamai dideliu n reiškinys (5) kiek norint artimas 2, todėl $f(x) \geqslant 2$.

ii) Yra ir kitas gražus būdas įsitikinti, kad a_n kiek norint artimas 2. Kadangi $a_1 = \sqrt{2}$, tai $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2(1+\sqrt{2}/2)} = \sqrt{2(1+\cos(\pi/4))} = 2\cos(\pi/8)$, $a_3 = \sqrt{2+2\cos(\pi/8)} = 2\cos(\pi/16)$, taigi $a_n = 2\cos(\pi/2^{n+1})$ (indukcija!). Kadangi $\pi/2^{n+1}$ kiek norint artimas nuliui, tai $\cos(\pi/2^{n+1})$ kiek norint artimas vienetui. Griežčiau: $|1-\cos(\pi/2^{n+1})| = 2\sin^2(\pi/2^{n+2}) < 2\cdot(\pi^2/2^{2n+4}) = \pi^2/2^{2n+3} < 16/2^{2n+3} = 2^{-2n+1}$.

iii) Žinoma, tą patį būdą galima taikyti funkcijai $f(x)$ iš karto. Kadangi (4) lygybė teisinga su visais $x > 0$, tai $f(x) > \sqrt{2}$, todėl ir $f(x^2) > \sqrt{2}$. Tada $f(x^4) = \sqrt{2+f(x^2)} > \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos(\pi/8)$, $f(x^8) = \sqrt{2+f(x^4)} > \sqrt{2+2\cos(\pi/8)} = 2\cos(\pi/16)$, ir remiantis indukcija $f(x^{2^n}) > 2\cos(\pi/2^{n+1})$, o tai reiškia, kad $f(x^{2^n}) \geqslant 2$, t.y. $f(x) \geqslant 2$.

iv) Pravartus ir toks, prieštaros, būdas. Tarkime, kad yra toks taškas x, kad $f(x) < 2$, t.y. $2-f(x) > 0$. Tada $f(x^2) = f^2(x)-2$, $2-f(x^2) = 4-f^2(x) = (2+f(x))(2-f(x))$. Kadangi $f(x) > 0$, tai $2-f(x^2) > (2+0)(2-f(x))$, t.y. $2-f(x^2) > 2(2-f(x))$. Todėl $2-f(x^4) > 2(2-f(x^2)) > 4(2-f(x))$, $2-f(x^8) > 2(2-f(x^4)) > 8(2-f(x))$, …, $2-f(x^{2^n}) > 2^n(2-f(x))$. Iš čia $f(x^{2^n}) < 2-2^n(2-f(x))$, ir pakankamai dideliems n dešinė pusė neigiama, o juo labiau kairė. Prieštara.

c) Mums reikia įrodyti, kad su visais x ir y teisinga lygybė

$$\bigl(f^2(x)-2\bigr)\bigl(f^2(y)-2\bigr) = f^2(xy)-2+f(x/y)-2.$$

Atsižvelgus į (3), ją galima perrašyti taip: $f(x^2)f(y^2) = f(x^2y^2)+f(x^2/y^2)$. Bet pastaroji lygybė akivaizdi – tai pradinė lygybė, tik parašyta su x^2 ir y^2 vietoje x ir y. Uždavinys išspręstas.

Pastabos. Iš punkto c) išplaukia, kad kiekviena funkcija $f(x)$ (išskyrus funkciją $f(x) \equiv 2$) generuoja be galo daug funkcijų. Iš tikrųjų, jei $f(x) \not\equiv 2$, tai yra taškas x_0, kuriame $f(x_0) > 2$. Bet tada tame taške $f^2(x_0)-2 > f(x_0)$, nes $(f(x_0)+1)(f(x_0)-2) > 0$, taigi funkcija $f^2(x)-2$ „didesnė“ už $f(x)$ bent jau taške x_0. Paėmę sprendinį $f^2(x)-2$, gausime dar „didesnį“ sprendinį, todėl sprendiniai niekada nepasikartos.

Iš karto kyla klausimas, kodėl uždavinyje nėra natūralios d) užduoties – išspręsti lygtį. Pasirodo, kad tai padaryti labai sunku. Uždavinį įmanoma išspręsti, jeigu funkcijai $f(x)$ keliama papildomų sąlygų, sakysime, reikalaujama monotoniškumo, aprėžtumo ar tolydumo kuriame nors intervale. Arba, pavyzdžiui, jeigu yra toks taškas $x_0 \neq 1$, kuriame $f(x_0) = 2$, tai $f(x) = 2$ taškuose x_0^2, x_0^4, x_0^8, … ir taškuose $1/x_0$, $1/x_0^2$, $1/x_0^4$, $1/x_0^8$, …, taip pat taškuose $x_0^{1/2}, x_0^{1/4}, x_0^{1/8}, \ldots$ ir $x_0^{-1/2}, x_0^{-1/4}, x_0^{-1/8}, \ldots$. Tai reiškia, kad jeigu sąlygoje būtų pareikalauta funkcijos $f(x)$ monotoniškumo bent viename iš intervalų $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,\infty)$, $(0,a)$, $(1-a,1)$, $(1,1+a)$, $(1/a,\infty)$ $(0 < a < 1$, pavyzdžiui, $a = 0{,}01)$, tai iš karto gautume, kad $f(x) = 2$ visur. Bet čia išnagrinėtas tik paprastas atvejis, kai yra taškas $x \neq 1$, kuriame $f(x) = 2$.

Bandykime spręsti toliau. Kadangi atspėtieji sprendiniai yra pavidalo $x^\alpha + 1/x^\alpha$, tai taikome keitinį $f(x) = g(x) + 1/g(x)$. Gali kilti klausimas, ar visada atsiras funkcija $g(x)$, tenkinanti šią lygybę. Spręskime lygtį $g(x)$ atžvilgiu: $g^2(x) = f(x)g(x) + 1 = 0$, $g(x) = f(x)/2 \pm \sqrt{f^2(x)/4-1}$. Vadinasi, galima imti, pavyzdžiui, $g(x) =$

$f(x)/2 + \sqrt{f^2(x)/4 - 1}$. Pošaknis neneigiamas, nes $f(x) \geqslant 2$, – ne šiaipsau tai nustatėme punkte b). Toliau, kadangi $f(1) = 2$, tai $g(1) = 1$, o kadangi $f(x) \geqslant 2$, tai $g(x) \geqslant 1$. Įstatome minėtą keitinį į (3) lygtį: $(g(x)+1/g(x))^2 = g(x^2)+1/g(x^2)+2$, $g^2(x) + 1/g^2(x) = g(x^2) + 1/g(x^2)$, $g^2(x)g(x^2)\big(g^2(x) - g(x^2)\big) = g^2(x) - g(x^2)$.

Įrodysime, kad visuose taškuose $g^2(x) = g(x^2)$. Iš tikrųjų, jeigu atsirastų tokių taškų, kuriuose $g^2(x) - g(x^2) \neq 0$, tai suprastinę turėtume $g^2(x)g(x^2) = 1$. Kadangi $g(x) \geqslant 1$, tai pastaroji lygybė reiškia, kad $g^2(x) = 1$, $g(x^2) = 1$, t.y. $g^2(x) = g(x^2)$, – prieštara.

Remiantis indukcija, nesunku įrodyti (žr. [1], psl. 57, 256–258, arba [2], psl. 9–11), kad lygybė $g(x^\alpha) = g^\alpha(x)$ teisinga su visais natūraliaisiais α, taip pat ir su visais racionaliaisiais α. Todėl jeigu uždavinio sąlygoje pareikalausime, kad funkcija $f(x)$, tenkinanti pradinę lygtį, būtų tolydi, tai aišku, kad pastaroji lygybė teisinga su visais realiaisiais α. Tada $g(x) = g(10^{\lg x}) = g^{\lg x}(10) = 10^{\lg g^{\lg x}(10)} = 10^{\lg x \cdot \lg g(10)} = (10^{\lg x})^{\lg g(10)} = x^{\lg g(10)} = x^\alpha$, kur pažymėjome $\lg g(10) = \alpha$. Vadinasi, $f(x) = g(x) + 1/g(x) = x^\alpha + 1/x^\alpha$, kur α – bet kuris realusis skaičius.

2005 m. Lietuvos olimpiados užduotys apžvelgtos straipsnyje [3], 2006 m. užduotys – straipsnyje [4].

Literatūra

1. К. Кохась и др. (сост.), *Петербургские олимпиады школьников по математике 2000–2002*, Невский диалект, Санкт-Петербург (2006).
2. J. Mačys, Funkcinės lygtys, *Alfa plius omega*, **1**(**7**), 5–29 (1999).
3. J. Mačys, 2005 m. Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados uždavinių analizė, *Liet. matem. rink.*, **46** (spec. nr.), 167–171 (2006).
4. J. Mačys, LV Lietuvos moksleivių matematikos olimpiada, kn.: *Matematika ir jos dėstymas*, KTU leidykla, Kaunas (2007).

SUMMARY

J. Mačys. Problems of Lithuanian mathematical olympiad'07

The problems of the Lithuanian school olympiad-2007 are presented and solutions are given.

Keywords: mathematical olympiads, problems solving, functional equation.