Liet. matem. rink., **47**, *spec. nr.*, 2007, 395–401

Pasirinkimo sandorių įkainojimo Markovo modelis

Eimutis VALAKEVIČIUS (KTU)
el. paštas: eimval@fmf.ktu.lt

1. Įvadas

Įkainojant išvestinius vertybinius popierius, pvz. akcijų pirkimo ar pardavimo pasirinkimo sandorius, reikia turėti pakankamai gerą bazinio aktyvo (akcijos) vertės dinamikos matematinį modelį. Paprastai reikia žinoti finansinio aktyvo kainų skirstinį pasirinkimo sandorio pabaigoje, t.y. galimas jo kainas ir atitinkamas jų tikimybes. Dažnai apie kainų skirstinį priimama tam tikra prielaida. Pvz., išvedant žymiąją Black ir Scholes pasirinkimo sandorių įkainojimo formulę [1], buvo tariama, kad akcijų kainos kinta pagal geometrinį Brauno judesio procesą. Kitaip tariant, akcijų kainų grąžų logaritmai pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Su šia prielaida akcijų kainos išreiškiamos per Gauso skirstinį ir lengvai skaičiuojamos, nes gaunamos analizinės raiškos.

Empiriniai tyrimai rodo, kad pastaraisiais metais tik dalies akcijų grąžos pasiskirstę pagal lognormalųjį dėsnį. Pastebėta, kad finansinių aktyvų grąžos, ypač jei matavimo dažnis didelis (kas dieną, ar kas kelios valandos), pasižymi dideliu eksceso koeficientu, kuris auga didėjant grąžų matavimo dažniui. Didelis eksceso koeficientas lemia ir didesnę ekstremaliųjų reikšmių tikimybę – sunkesnes, nei normaliojo skirstinio, uodegas. Todėl tam tikroms grąžoms daryti normalumo prielaidą yra nekorektiška.

Todėl pastaraisiais metais vis didesnį dėmesį tyrėjai skiria stochastiniams modeliams, besiskiriantiems nuo klasikinių difuzinių modelių. Kai kurie autoriai siūlo normalųjį skirstinį pakeisti kitais, geriau tinkančiais skirstiniais. Pastaruoju metu tapo populiarūs α-stabilieji skirstiniai ir Levy procesai [2–5]. Parenkant (kalibruojant) tinkamus skirstinio parametrus, galima pakankamai gerai aproksimuoti akcijų grąžų skirstinius. Tokių modelių pagrindinis trūkumas yra tas, kad gaunamos sudėtingos skirstinių analizinės raiškos ir gauti diferencialines lygtis, kurias išsprendus gaunamos pasirinkimo sandorių kainos, dažniausiai nepavyksta. Todėl pastaruoju metu kaip alternatyva tokiems modeliams plačiai naudojamas skaitinis modeliavimas, kuris ženkliai suprastina praktinių uždavinių sprendimą ir išplečia sprendžiamų uždavinių klasę.

Kadangi daugelis procesų, kuriais siūloma aprašyti kainų dinamiką, turi Markovo proceso savybių, tai tikslinga kainų kitimą aprašyti Markovo procesu.

Šiame straipsnyje pateiktas pasirinkimo sandorių įkainojimo algoritmas tariant, kad bazinio aktyvo kainos kinta pagal Markovo procesą su tolydžiuoju laiku ir baigtine būsenų aibe.

2. Normalumo tikrinimas

Tikrinant akcijos grąžų pasiskirstymą dažniausiai braižoma histograma su normaliojo skirstinio tankio kreive ir naudojami šie normalumo tikrinimo kriterijai: *Jarque–Bera, Kolmogorov–Smirnov, Cramer–von Mises, Anderson–Darling, Chi kvadrato*. Buvo panaudotas *Jarque–Bera* kriterijus, kadangi jis remiasi būtent tais parametrais, kuriais akcijų grąžų pasiskirstymas aiškiai skiriasi nuo normaliojo skirstinio. Likusieji yra standartiniai kriterijai *SAS* sistemoje.

Buvo tirtos 28 JAV ir 28 Lietuvos rinkas geriausiai atspindinčios akcijų grąžos. Atlikus normalumo testus, gauti rezultatai matomi 1 lentelėje.

Labiausiai normalumo kriterijų pažeidė *General Motors* (GM) ir *Pieno žvaigždės* (PZV1L), o didžiausią asimetrijos koeficientą turėjo *Coca Cola* (CO) ir *Pieno žvaigždės* (PZV1L) firmų akcijos.

3. Finansinio aktyvo vertės dinamikos Markovo procesas

Kadangi akcijų kainos turi atsitiktinį charakterį, tai realiai yra nežinoma pagal kokį procesą kinta jų kainos. Tiriant skirtingas akcijas, galima gauti įvairius jų grąžų skirstinius. Todėl modeliuojant akcijų kainas, reikėtų taikyti įvairius stochastinius modelius, o tai ženkliai apsunkintų pasirinkimo sandorių įkainojimo modelių kūrimą ir jų panaudojimą.

Kainų dinamika atspindi atsitiktinį aktyvų vertės kitimą laike. Daugelis autorių [6, 7] mano, kad atsitiktinis kainų elgesys susijęs su efektyviosios rinkos hipoteze (ERH). Ši hipotezė teigia, kad praeities informacija apie finansų rinkas visiškai atsispindi esamosiose finansinių aktyvų kainose ir kad rinkos akimirksniu reaguoja į naują informaciją apie aktyvus. Iš šių prielaidų išplaukia, kad aktyvų kainų atsitiktinį kitimą galima aprašyti Markovo procesu.

Tarkime, kad X yra atsitiktinis dydis, aprašantis laiko trukmę, per kurią akcijos kaina pereina iš vienos būsenos į kitą, t. y. pakinta kaina.

Norėdami rasti galimas akcijų kainas (būsenų aibę) ir perėjimo intensyvumų matricą tarp jų, turime sukonstruoti konkrečios akcijos kainų kilimo ir kritimo trukmių skirstinius. Tam, kad procesas būtų Markovo, trukmės tarp būsenų pasikeitimo skirstinys turi būti eksponentinis. Paprastai ši sąlyga nėra išpildoma. Nežinomam skirstiniui aproksimuoti panaudosime fiktyvių eksponentinių fazių metodą [8].

Tarkime, kad teigiamo atsitiktinio dydžio X (akcijos kainos perėjimo iš vienos būsenos į kitą trukmė) pasiskirstymo funkcija yra $G(x)$. Aproksimuokime $G(x)$ eksponentinių skirstinių mišiniu. Tarkime, kad egzistuoja skirstinio $G(x)$ pirmieji trys

1lentelė. JAV ir Lietuvos rinkas geriausiai atspindinčių akcijų grąžų pasiskirstymas

Akcijos	Normaliai pasiskirsčiusios grąžos	Didžiausias eksceso koeficientas	Didžiausias asimetrijos koeficientas	Neigiamų asimetrijų skaičius	Teigiamų asimetrijų skaičius
JAV	14	14,09 (GM)	–0,9 (CO)	23	5
Lietuva	0	29,65 (PZV1L)	–3,18 (PZV1L)	14	14

pradiniai momentai m_k, $k = \overline{1,3}$. Jie gali būti žinomi arba gauti jų statistiniai įverčiai iš stebėtų duomenų (laiko eilutės).

Apibrėžkime kitą atsitiktinį dydį Y tokiu būdu:

$$Y = \begin{cases} Y_1 & \text{su tikimybe } \ p_2, \\ Y_1 + Y_2 & \text{su tikimybe } \ p_1, \end{cases}$$

čia Y_1 ir Y_2 nepriklausomi eksponentiškai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai atitinkamai su parametrais μ_1 ir $p_2\mu_2$; $p_1 + p_2 = 1$. Šio dydžio tankio funkcija yra

$$f(y) = p_2\mu_1\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1}\mathrm{e}^{-\mu_1 y} - \frac{\mu_2 p_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1}\mathrm{e}^{-\mu_2 p_2 y}\right).$$

Šia funkcija galima aproksimuoti skirstinio $G(x)$ tankio funkciją. Aproksimuojančios funkcijos parametrai, naudojant momentų metodą, yra įvertinami pagal formules, pateiktas [9].

Tarkime, kad akcijos kaina gali tik padidėti arba tik sumažėti nykstamu dydžiu per nykstamą laiko intervalą. Tokia prielaida yra priimama konstruojant Brauno judesio procesą. Pasinaudodami pasirinktos akcijos istoriniais kainų dinamikos duomenimis, aproksimuojame kainų didėjimo (indeksas u) ir mažėjimo (indeksas d) trukmių tankio funkcijas atitinkamai pagal formules

$$f_u(y) = p_1^u\mu_1^u\left(\frac{\mu_2^u - \mu_1^u}{\mu_2^u p_2^u - \mu_1^u}\mathrm{e}^{-\mu_1^u y} - \frac{\mu_2^u p_2^u}{\mu_2^u p_2^u - \mu_1^u}\mathrm{e}^{-\mu_2^u p_2^u y}\right);$$

$$f_d(y) = p_1^d\mu_1^d\left(\frac{\mu_2^d - \mu_1^d}{\mu_2^d p_2^d - \mu_1^d}\mathrm{e}^{-\mu_1^d y} - \frac{\mu_2^d p_2^d}{\mu_2^d p_2^d - \mu_1^d}\mathrm{e}^{-\mu_2^d p_2^d y}\right).$$

Žinant šias funkcijas, galima aprašyti akcijos kainų kitimo dinamiką Markovo grandine su skaičia būsenų aibe ir tolydžiuoju laiku. Šį procesą galima sumodeliuoti pasinaudojus metodika, aprašyta [10].

Apibrėšime kainų būsenų aibę. Tarkime, kad yra žinomos akcijos didžiausioji ir mažiausioji kainos, t. y. visos galimos kainos priklauso atkarpai $[S_{\min}, S_{\max}]$. Jeigu pradinė akcijos kaina yra S_0, tai kitos reikšmės nustatomos iš lygybių:

$$\begin{aligned} &S_0 = (S_{\max} + S_{\min})/2, \\ &S_k = S_0 + k\Delta, \quad k = 1, \cdots, n, \\ &S_{-k} = S_0 - k\Delta, \quad k = 1, \ldots, n, \\ &\Delta = (S_{\max} - S_{\min})/2n; \end{aligned}$$

čia n parenkamas laisvai. Tokiu būdu viso yra $2n+1$ kainos būsenų. Sunumeravę šias būsenas nuo 1 iki $2n+1$, turėsime tokią kainų būsenų erdvę $S = \{S_i, i = \overline{1, 2n+1}\}$.

Turint būsenų erdvę ir perėjimo intensyvumus tarp jų, gautus iš sukonstruotos tankio funkcijos, galima sudaryti lygčių sistemą stacionariosioms būsenų tikimybėms rasti. Tam tikslui C++ kalboje yra sukurta automatizuota Markovo modelių konstravimo ir sprendimo programinė įranga. Ji pagal įvykių aprašymą generuoja galimų būsenų erdvę, perėjimo intensyvumų matricą, sudaro lygčių sistemą stacionarioms Markovo proceso būsenų tikimybėms suskaičiuoti ir jas suranda. Pažymėję kainos S_i tikimybę p_i, gauname akcijų kainų stacionarųjį skirstinį $\{S_i, p_i, i = \overline{1, 2n+1}\}$.

4. Europietiškojo pirkimo pasirinkimo sandorio įkainojimas

Tarkime, kad reikia rasti akcijos pirkimo pasirinkimo sandorio kainą momentu t, kuris baigiasi momentu T su įvykdymo kaina K. Sandoris gali būti kaip europietiško, taip ir amerikietiško tipo. Europietiškojo sandorio vertė momentu T lygi $C(T) = \max\{0, S(T) - K\}$. Amerikietiškojo tipo sandorio vertė yra $\max_{t=1,\dots,T}\{\max(0, S_t - K)\} = \max\{0, S_t - K\}$ [11].

Tarkime, kad apibrėžta nagrinėjamo akcijų proceso tikimybinė erdvė $\{\Omega, F, P\}$. Kadangi ši erdvė yra diskrečioji ir baigtinė, tai žinant perėjimo tarp būsenų intensyvumų matricą, galima nagrinėti ir homogeninę Markovo grandinę su perėjimo tikimybių matrica $P = (p_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 2n+1$, apibrėžtą būsenų erdvėje S.

Tarkime, kad laiko momentu t sandorio vertė lygi $C(t)$, akcijos kaina yra $S(t) = S_t$, sandorio trukmė $T - t$, o įvykdymo kaina $K = k_0\Delta$. Tada sandorio vertės skirstys momentu T yra toks:

$$\begin{aligned} &P\big[C(T) = (j-k_0)\Delta\big] = p_{S_t,j}^{(T-t)}, \quad j > k_0 \\ &P\big[C(T) = 0\big] = \sum_{l \leqslant k_0} p_{S_t,l}^{(T-t)}, \quad j \leqslant k_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Iš (1) raiškos galime nesunkiai suskaičiuoti dominančius sandorio vertės C įvairius tikimybinius dydžius. Pvz., $C(t)$ sąlyginis vidurkis skaičiuojamas taip:

$$E\big[C(T)|S(t) = S_t\big] = \sum_{j>k_0} p_{S_t,j}^{(T-t)}(j-k_0)\Delta. \tag{2}$$

Finansinio aktyvo vertė laiko momentu t, kai palūkanų norma yra i, lygi

$$\begin{aligned} C(t) &= v^{(T-t)}E\big[C(T)|S(t) = S_t\big] \\ &= v^{(T-t)}\sum_{j>k_0} p_{S_t,j}^{(T-t)}(j-k_0)\Delta, \quad v = (1+i)^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Jeigu matrica P yra ergodinė ir skirtumas $T-t$ yra pakankamai didelis, tai formules (1), (2) ir (3) galima užrašyti taip:

$$\left.\begin{aligned} &P\big[C(T) = (j-k_0)\Delta\big] = \pi_j, \ j > k_0 \\ &P\big[C(T) = 0\big] = \sum_{l \leqslant k_0} \pi_l, \qquad j \leqslant k_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &E\big[C(T)|S(t)=S_t\big]=\sum_{j>k0}\pi_j(j-k_0)\Delta\\ &C(t)=v^{(T-t)}\sum_{j>k_0}\pi_l(j-k_0)\Delta \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

čia $\pi=(\pi_1,\dots,\pi_{2n+1})$ yra būsenų stacionariųjų tikimybių vektorius.

5. Skaitmeninis pavyzdys

Nagrinėkime keturių mėnesių laikotarpio „*Microsoft Corporation*“ akcijų kainas. Iš stebėtų praeities duomenų galime tarti, kad $S_{\max}=28,10$, $S_{\min}=24,15$. Vidutinis akcijos dienos kainos pokytis $\Delta=0,1796$. Tad akcijos kainos suskirstomos į 22 intervalus. Iš laiko eilutės gauti tokie pradiniai momentai:

$$m_1^U=2,2402;\quad m_2^U=11,6950;\quad m_3^U=85,7250;$$
$$m_1^D=1,8321;\quad m_2^D=6,9676;\quad m_3^D=37,4190.$$

Aproksimuojančios funkcijos parametrai lygūs

$$\mu_1^U=0,4014;\quad \mu_2^U=1,2384;\quad p_1^U=0,2373;$$
$$\mu_1^D=0,5381;\quad \mu_2^D=0,3358;\quad p_1^D=0,0088.$$

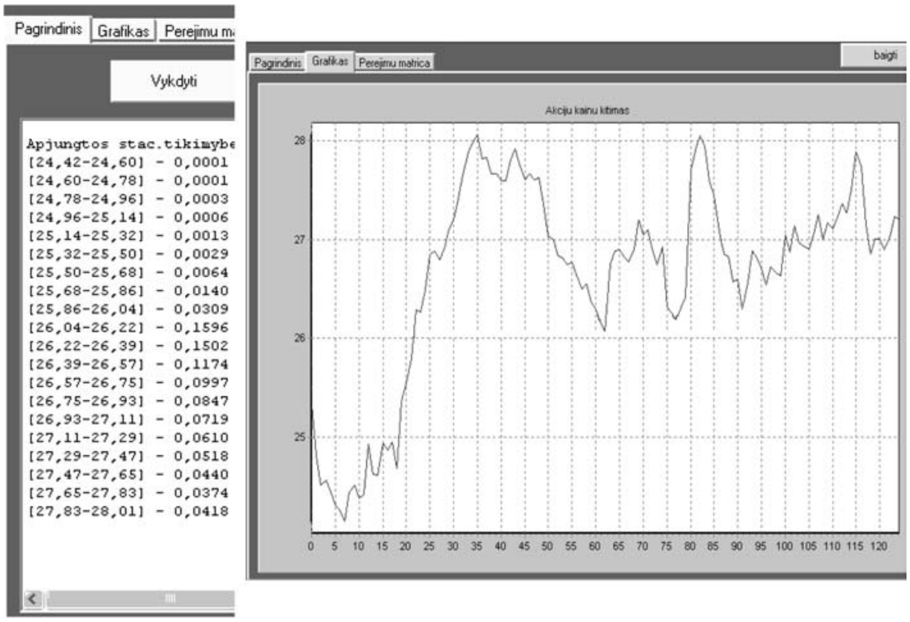
Pasiūlytu metodu akcijų kainų dinamika aprašoma Markovo procesu. Pateikus pradinius duomenis, nuskaitytus iš tekstinės bylos, programa suskaido galimas aktyvo kainas į intervalus. Kiekvienas intervalas suvokiamas kaip būsena ir suskaičiuojamos jų stacionariosios tikimybės. Sukurtoji programinė įranga pagal pateiktą įvykių aprašymą, sumodeliuoja 88 būsenų aibę, perėjimų intensyvumų matricą bei būsenų stacionariąsias tikimybes. Dalis akcijų tikimybinio skirstinio pateikta 1 pav.

Suskaičiavus stacionariąsias tikimybes bei panaudojus 4 skyrelyje pateiktą sandorių įkainojimo algoritmą, galima suskaičiuoti sandorio kainą. Kiekvieno intervalo (būsenos) vidutinė kaina yra traktuojama, kaip opciono įvykdymo kaina ir suskaičiuojama tokio sandorio tikėtina vertė bei esamoji vertė.

Buvo stebėtos kompanijos *McDonalds* akcijų keturių metų kainos. Suskaičiuokime šios akcijos pirkimo pasirinkimo sandorio kainą. Tarkime, kad nerizikingoji palūkanų norma lygi 5%, o sandorio trukmė lygi 10 metų. Gautos modeliuotos akcijos pirkimo pasirinkimo sandorio kainos matomos 2 lentelėje.

6. Išvados

Empiriniai tyrimai parodė, kad maždaug pusei tirtų JAV firmų akcijų grąžų galima taikyti normalumo prielaidą, kai tuo tarpu visų tirtų Lietuvos firmų akcijų grąžos netenkino normalumo kriterijaus. Todėl darbe pateikta metodika kaip nežinomą aktyvų vertės pasikeitimo trukmės skirstinį aproksimuoti eksponentinių skirstinių mišiniu. Tai leidžia aktyvų dinamikos procesą aprašyti Markovo grandine su skaičia būsenų



1 pav. Akcijų tikimybinio skirstinio dalis.

2 lentelė. Opciono įkainojimas

Įvykdymo kaina	Tikėtina vertė	Diskontuotoji vertė
35,34	38,42	23,59
45,99	10,31	6,33
50,38	5,92	3,63
55,39	3,08	1,89
60,41	1,54	0,95
65,42	0,72	0,44
75,45	0,05	0,03

erdve ir tolydžiuoju laiku. Procesui modeliuoti skaitiniu metodu yra sukurta programinė priemonė, kuri pagal sistemos funkcionavimo aprašymą įvykių kalba sugeneruoja galimų kainų būsenų aibę, perėjimo intensyvumus tarp jų ir būsenų stacionariąsias tikimybes. Žinant akcijos kainų stacionarųjį skirstinį, galima skaitiniais metodais įkainoti pasirinkimo sandorius.

Literatūra

1. F. Black, M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654 (1973).
2. D.B. Madan, E. Seneta, The VG model for share market returns, *Journal of Business*, **63**, 511–524 (1990).

3. O.E. Barndorff-Nielsen, Normal inverse Gaussian distributions and the modelling of stock returns, *Research Report no. 300*, Department of Theoretical Statistics, Aarhus University (1995).
4. B. Grigelionis, Processes of Meixner type, *Lith. Math. J.*, **39**(1), 33–41 (1999).
5. E. Eberlein, U. Keller, Hyperbolic distributions in finance, *Bernoulli*, **1**, 281–299 (1995).
6. B. Cuthberston, *Quantative Financial Economics*, John Wieley&Sons, New York (1996).
7. P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press (1997).
8. E. Valakevičius, Teigiamo atsitiktinio dydžio skirstinio aproksimavimas eksponentinių skirstinių mišiniu, kn.: *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai*, II tomas, 475–477 (1998).
9. E. Valakevičius, Finansinių aktyvų dinamikos skaitmeninis modelis, *Liet. matem. rink.*, **46** (*spec. nr.*), 295–302 (2006).
10. H. Pranevičius , E. Valakevičius, *Numerical Models of Systems Specified by Markovian Processes*, Kaunas, Technologija (1996).
11. J. Janssen, R. Manca, G. di Biase, Markov and semi-Markov option pricing models with arbitrage opportunity, *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **13**, 103–113 (1997).

SUMMARY

E. Valakevičius. Markov model of option pricing

In the article is proposed the algorithm of modeling the dynamics of asset prices by Markov process with continuous time and countable set of states and numerical option pricing.

Keywords: assets dynamics, mixture of exponential distributions, Markov model of asset prices, numerical option pricing.