Liet. matem. rink., **47**, *spec. nr.*, 2007, 473–478

Valdymo sistemos su vėlavimais analizinis tyrimas

Tatjana SIDEKERSKIENĖ, Jonas RIMAS (KTU)
el. paštas: tatjana.sidekerskiene@ktu.lt, jonas.rimas@ktu.lt

Reziumė. Darbe nagrinėjama priverstinės sinchronizacijos sistema, sudaryta iš n generatorių, kurių vienas (vedantysis) priverstinai sinchronizuoja $(n-1)$ sujungtų į žiedą valdomų generatorių. Šiai sistemai sudarytas matematinis modelis, gautos pereinamųjų funkcijų matricos elementų tikslios analizinės išraiškos.

Raktiniai žodžiai: sinchronizacijos sistema, diferencialinės lygtys, vėlavimas.

1. Įvadas

Valdymo sistemos naudojamos įvairiuose gamybos procesuose, informacijos perdavimo ir paskirstymo tinkluose. Dažnai tenka įvertinti valdymo signalų vėlavimus tokiose sistemose ir nagrinėti sudėtingesnius matematinius modelius – matricines diferencialines lygties su vėluojančiu argumentu [1, 2].

Šiame darbe nagrinėsime daugiamatę valdymo sistemą, aprašomą matricine diferencialine lygtimi

$$Dx(t) = B_0 x(t) + B_1 x(t-\tau) + z(t); \tag{1}$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius (taikomas apibendrintoms funkcijoms), $B_0 = \operatorname{diag}(0, -\kappa, -\kappa, \ldots, -\kappa)$ – n-tosios eilės diagonalioji matrica, κ – koeficientas, $B_1 = \frac{\kappa}{3} B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 1 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & & & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

n-tosios eilės skaitinė matrica, $x(t) = (x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ – ieškoma vektorinė funkcija (čia T žymi transponavimo operaciją), $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų, τ – pastovus vėlavimas.

Valdymo sistemos, aprašomos (1) lygtimi, pavyzdžiu galėtų būti ryšio tinklo priverstinės sinchronizacijos sistema, sudaryta iš n generatorių, kurių vienas (vedantysis) priverstinai sinchronizuoja $(n-1)$ sujungtų į žiedą valdomų generatorių [3].

Ištirsime šios sistemos dinamiką. Tuo tikslu išspręsime (1) lygtį ir, remdamiesi gautu sprendiniu, rasime sistemos reakciją į vienetinės funkcijos formos poveikius.

2. Matricinės diferencialinės lygties sprendimas

(1) matricinę diferencialinę lygtį spręsime naudodami nuoseklaus integravimo („žingsnių") metodą [3]. Taikydami šį metodą, intervalą $0 \leqslant t < +\infty$ dalijame į dalinius intervalus, kurių ilgiai lygūs vėlavimui τ. Kiekviename daliniame intervale (1) diferencialinę lygtį sprendžiame atskirai, kaip lygtį be vėluojančio argumento. Sprendinys, gautas kuriame nors intervale, yra pradinė funkcija (pradinė sąlyga) sprendžiant lygtį tolimesniame intervale. Panaudojus Laplaso transformaciją, (1) matricinės diferencialinės lygties sprendinį parašome taip:

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} \left(A^{-1}B_1 e^{-p\tau}\right)^l A^{-1}Z(p), \quad 0 \leqslant t < (L+1)\tau;$$

čia $A = pE - B_0$; E – vienetinė n-tosios eilės matrica, $A^{-1} = \frac{1}{p+\kappa}\mathrm{diag}(\frac{p+\kappa}{p}, 1, 1, \ldots, 1)$, $Z(p) \div z(t)$, $Z(p)$ – funkcijos $z(t)$ Laplaso transformacija ($\div$ – operatorinės lygybės simbolis, siejantis pirmavaizdį su jo vaizdu), $L = 0, 1, 2, \ldots$.

Įvertinę (2), rašome

$$x(t) \div \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{\kappa}{3}\right)^l e^{-pl\tau}(A^{-1})^l B^l A^{-1}Z(p), \quad 0 \leqslant t < (L+1)\tau. \tag{3}$$

Rasime nagrinėjamos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą $h(t) = (h_{ij}(t))$; čia $h_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1, n})$ – i-tojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į j-tojo generatoriaus virpesio fazes vienetinį šuolį.

Pasinaudoję (3) sprendiniu, randame [3]:

$$h(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{l=0}^{L} \left(\frac{\kappa}{3}\right)^l e^{-pl\tau}(A^{-1})^l B^l A^{-1}, \quad 0 \leqslant t < (L+1)\tau. \tag{4}$$

3. Matricos B l-tasis laipsnis

Matricos B l-tąjį laipsnį ($l \in N$) rasime pasinaudoję išraiška $B^l = TJ^lT^{-1}$[4], kurioje J – matricos B Žordano forma, T – transformuojančioji matrica. Matricas J ir T rasime, jeigu žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Matricos B tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{5}$$

Pažymėkime

$$D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 & & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 1 & & & & 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & & & & & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & & & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix}; \tag{6}$$

čia $\alpha \in R$. Tada

$$|B - \lambda E| = D_n(-\lambda). \tag{7}$$

Atlikę reikiamus pertvarkymus, randame:

$$D_n(\alpha) = 2\alpha\left(T_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - (-1)^{n-1}\right); \tag{8}$$

čia $T_n(x)$ – n-tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševo daugianaris:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{9}$$

Daugianario $T_n(x)$ visi nuliai yra intervale $[-1, 1]$ ir gali būti surasti, naudojantis formule [5]:

$$x_{nk} = \cos\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Remiantis (16) išraiška, randame daugianario $T_m(y) - (-1)^m$ šaknis:

$$y_k = \cos\frac{k\pi}{m}; \tag{11}$$

čia $k = 1, 3, 5, \ldots, m$ nelyginiams m ir $k = 0, 2, 4, \ldots, m$ lyginiams m.

Toliau atskirai nagrinėsime atvejus, kai $n = 4$, $n = 6$ ir $n = 8$.

Tegul $n = 4$ (n yra sinchronizacijos sistemos generatorių skaičius ir matricos B eilė). Įvertinę (7), (8) ir (11) išraiškas, randame (5) charakteristinės lygties šaknis (matricos B tikrines reikšmes):

$$\lambda_k = \begin{cases} -2\cos\frac{k\pi}{3}, & k = 1, 3, \\ 0, & k = 2. \end{cases}$$

Įvertinę tikrinių reikšmių kartotinumą, parašome matricos B Žordano formą:

$$J = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathrm{diag}(-1, -1, 0, 2).$$

Pasinaudoję lygybe $J = T^{-1}BT$ randame matricas T, T^{-1} ir matricą B^l [4]:

$$B^l = TJ^lT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^l = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_2 \\ a_0 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}_{4\times 4}; \quad (12)$$

čia $K = (0)_{1\times 1},\ L = (0\ 0\ 0)_{1\times 3},\ M^T = (a_0\ a_0\ a_0)_{1\times 3}$,
$N = \begin{pmatrix} a_1\ a_2\ a_2 \\ a_2\ a_1\ a_2 \\ a_2\ a_2\ a_1 \end{pmatrix} = \mathrm{circ}(a_1, a_2, a_2)$($N$ yra cirkuliantinė matrica, kuriai kartais naudosime sutrumpintą pažymėjimą $\mathrm{circ}(\cdot)$ [6]),

$$a_0(l) = 2^{l-1}3, \quad a_1(l) = 2^l + 2(-1)^l, \quad a_2(l) = 2^l - (-1)^l. \quad (13)$$

Kai $n = 6$, analogiškai gauname:

$$\lambda_k = \begin{cases} -2\cos\frac{k\pi}{5}, & k = 1, 3, 5, \\ 0, & k = 2, \end{cases}$$

$$J = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_5) = \mathrm{diag}(-a, -a, 0, b, b, 2),$$

$$a = 2\cos\frac{\pi}{5}, \quad b = 2\cos\frac{3\pi}{5},$$

$$B^l = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}_{6\times 6}; \quad (14)$$

$$K = (0)_{1\times 1}, \quad L = (0\ 0\ 0\ 0\ 0)_{1\times 5}, \quad M^T = (a_0\ a_0\ \cdots\ a_0)_{1\times 5},$$

$$N = \mathrm{circ}\,(a_1, a_2, a_3, a_3, a_2)\,,$$

$$a_0(l) = 2^{l-1}5, \quad a_1(l) = 2^l + 2(-a)^l + 2b^l, \quad a_2(l) = 2^l + (-a)^{l+1} + b^{l-1},$$

$$a_3(l) = 2^l + b(-a)^l - ab^l. \quad (15)$$

Tuo atveju, kai $n = 8$, turime:

$$\lambda_k = \begin{cases} -2\cos\frac{k\pi}{7}, & k = 1, 3, 5, 7, \\ 0, & k = 4, \end{cases}$$

$$J = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_5, \lambda_7) = \mathrm{diag}\,(-a, -a, -b, -b, 0, c, c, 2)\,,$$

$$a = 2\cos\frac{\pi}{7}, \quad b = 2\cos\frac{3\pi}{7}, \quad c = 2\cos\frac{5\pi}{7},$$

$$B^l = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}_{8\times 8}; \quad (16)$$

$$K = (0)_{1\times 1}, \quad L = (0\ 0\ 0\ 0\ 0)_{1\times 7}, \quad M^T = (a_0\ a_0\ \cdots\ a_0)_{1\times 7},$$

$$N = \mathrm{circ}\,(a_1, a_2, a_3, a_4, a_4, a_3, a_2)\,,$$

$$a_0(l) = 2^{l-1}7, \quad a_1(l) = 2^l + 2(-a)^l + 2(-b)^l + 2c^l,$$
$$a_2(l) = 2^l + (-a)^{l+1} + (-b)^{l+1} + c^{l+1}, \quad a_3(l) = 2^l + c(-a)^l - a(-b)^l - bc^l,$$
$$a_4(l) = 2^l - b(-a)^l + c(-b)^l - ac^l. \tag{17}$$

4. Pereinamųjų funkcijų matrica

Įstatę matricos B^l išraišką į (4) ir atlikę atvirkštinę Laplaso transformaciją, rasime sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matricą.

Kai $n = 6$, matrica B^l išreiškiama (14) formule. Įstatę ją į (4) ir atlikę atvirkštinę Laplaso transformaciją, randame:

$$h(t) = (h_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} C & D \\ F & G \end{pmatrix}_{6\times 6};$$
$$C = (1(t))_{1\times 1}, \quad D = (0\ 0\ 0\ 0\ 0)_{1\times 5}, \quad F^T = (h_0\ h_0\ \cdots\ h_0)_{1\times 5},$$
$$G = \mathrm{circ}(\alpha + h_1, h_2, h_3, h_3, h_2),$$

čia $\alpha(t) = e^{-\kappa t}1(t)$,

$$h_0(t) = \sum_{l=1}^{L} \frac{a_0(l)}{5\cdot 3^l}\Big[1 - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\kappa^k (t-l\tau)^k}{k!} e^{-\kappa(t-l\tau)}\Big]\cdot 1(t-l\tau), \quad 0 \leqslant t < (L+1)\tau,$$

$$h_i(t) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\kappa^l}{5\cdot 3^l} a_i(l) \frac{(t-l\tau)^l}{l!} e^{-\kappa(t-l\tau)} \cdot 1(t-l\tau), \quad i = \overline{1,3};\ 0 \leqslant t < (L+1)\tau,$$

koeficientai $a_i(l)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ apibrėžiami (15) išraiška.

Analogiškai užrašoma pereinamųjų funkcijų matrica, kai $n = 6$ ir $n = 8$. Dėl vietos stokos šių matricų išraiškų čia nepateiksime.

5. Išvados

1. Gautos pereinamųjų funkcijų analizinės išraiškos gali būti panaudotos sinchronizacijos sistemos pereinamųjų procesų tyrimui, statistinių charakteristikų skaičiavimui, darbo nusistovėjusiame režime analizei.
2. Pereinamųjų funkcijų skaičiavimo metodas, panaudotas šiame darbe, gali būti pritaikytas kitoms valdymo sistemoms, kurios yra aprašomos tiesine matricine diferencialine lygtimi su vėluojančių argumentu.

Literatūra

1. S. Bregni, A historical perspective on telecomunications networks synchronization, *IEEE Communications Magazine*, **36**(6), 158–166 (1998).
2. W.C. Lindsey, J.H. Chen, Mutual clock synchronization in global Digital communication networks, *Euro. Trans Telecommun.*, **7**(1), 25–37 (1996).
3. J. Rimas, Investigation of the dynamics of mutually synchronized systems, *Telecomm. and Radio Eng.*, **32**(2), 68–73 (1977).

4. P. Horn, C. Johnson, *Matrix Analys*, Cambridge University Press, Cambrige (1985).
5. L. Fox, J.B. Parke, *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford University Press, London (1968).
6. P.J. Davis, *Circulant Matrices*, John Willey and Sons, New York (1979).

SUMMARY

T. Sidekerskiene, J. Rimas. Analytical investigation of the control sysytem with delays

The forced synchronization system compared of n oscillators ($n = 4, 6, 8$) is analysed. Exact analytical expressions for elements of the step responses matrix of the system are derived.

Keywords: synchronization system, differential equation, delay.