Liet. matem. rink., **47**, *spec. nr.*, 2007, 499–502

Ekstremumų Kramerio transformacijų asimptotinė analizė

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
el. paštas: algimantas.aksomaitis@ktu.lt

1. Įvadas

Sakykime, yra dvi atsitiktinių dydžių (a.d.) sekos: $\{X_j, j \geqslant 1\}$ – nepriklausomieji a.d. su tolydžiąja skirstinio funkcija $F(x) = P(X_j \leqslant x)$; $\{N_n, n \geqslant 1\}$ – a.d., įgyjantieji tik sveikas teigiamas reikšmes su skirstinio funkcija $A_n(x) = P(N_n \leqslant x)$. A.d. X_j ir N_n su visais $j \geqslant 1$ ir $n \geqslant 1$ yra nepriklausomi.

Pažymėkime:

$$Z_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad W_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Šias struktūras normalizuojame Kramerio transformacijomis [2]:

$$\tilde{Z}_n = n\bigl(1 - F(Z_n)\bigr), \quad \tilde{W}_n = nF(W_n).$$

Tada

$$P(\tilde{W}_n \leqslant x) = P(\tilde{Z}_n \leqslant x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant n, \tag{1}$$

ir netolygusis konvergavimo greičio įvertis [3]

$$0 \leqslant \Delta_n(x) = P(\tilde{W}_n \leqslant x) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \frac{x^2 \mathrm{e}^{-x}}{2(n-1)}$$

bei tolygusis

$$\sup_x \Delta_n(x) \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{-2}}{n-1}.$$

Mus domins struktūrų su atsitiktiniu komponenčių skaičiumi, normalizuotų Kramerio transformacijomis,

$$\tilde{W}_{N_n} = nF(W_{N_n}), \quad \tilde{Z}_{N_n} = n\bigl(1 - F(Z_{N_n})\bigr)$$

asimptotinis elgesys, kai $n \to \infty$.

Netiesinio normalizavimo bendrieji atvejai yra tirti, pavyzdžiui, [4], [5] ir [1] darbuose. Konkretaus normalizavimo (Kramerio transformacijos) atveju gausime tikslesnius įverčius negu [1] darbe.

2. Teiginių formuluotė ir įrodymas

TEOREMA.
- *Jeigu* $P\big(\frac{N_n}{n} \leqslant x\big) \to A(x)$, *kai* $n \to \infty$, *tai*

$$P(\tilde{W}_{N_n} \leqslant x) \to \Psi(x) = 1 - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xz}\,\mathrm{d}A(z).$$

- *Jeigu* $A(+0) = 0$ *ir* $\frac{x}{n} = q < 1$, *tai*

$$\Delta_{N_n}(x) = P(\tilde{W}_{N_n} \leqslant x) - \Psi(x) \leqslant \frac{x^2}{2n(1-q)} \int_0^\infty z\mathrm{e}^{-xz}\,\mathrm{d}A_n(nz) + x\int_0^\infty \big(A(z) - A_n(nz)\big)\mathrm{e}^{-xz}\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

Iš teoremos išplaukia šie teiginiai:

1 teiginys. Netolygusis įvertis (2) galioja ir maksimumų struktūrai $\tilde{Z}_{N_n} = n(1 - F(Z_{N_n}))$.

2 teiginys. $I_n^{(2)}(x) \leqslant \frac{x^2}{2n(1-q)} \cdot \frac{MN_n}{n}$ (žiūr. (3)).

3 teiginys. Jeigu yra tolygusis įvertis $\sup_z(A(z) - A_n(nz)) \leqslant \delta_n$, tai $I_n^{(1)}(x) \leqslant \delta_n$ (žiūr. (3)).

Teoremos įrodymas. Panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname:

$$P(\widetilde{W}_{N_n} \leqslant x) = 1 - \sum_k \left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{\frac{k}{n}}\right)^n P(N_n = k) = 1 - \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{nz} \mathrm{d}A_n(nz).$$

Skaičiuodami ribą, gauname teoremos pirmosios dalies įrodymą:

$$\lim_{n\to\infty} P(\widetilde{W}_{N_n} \leqslant x) = \Psi(x) = 1 - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xz}\,\mathrm{d}A(z).$$

Toliau:

$$\begin{aligned}\Delta_{N_n}(x) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xz}\,\mathrm{d}A(z) - \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{nz} \mathrm{d}A_n(nz)\\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xz}\,\mathrm{d}\big(A(z) - A_n(nz)\big) + \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-xz} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{nz}\right) \mathrm{d}A_n(nz)\\ &= I_n^{(1)}(x) + I_n^{(2)}(x).\end{aligned} \tag{3}$$

Pradžioje įvertiname $I_n^{(2)}(x)$. Turime:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-xz} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{nz} = z\int_{(1-\frac{x}{n})^n}^{\mathrm{e}^{-x}} t^{z-1}\,\mathrm{d}t \leqslant z\mathrm{e}^{-xz}\left(\ln \mathrm{e}^{-x} - \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right)$$

$$= z\mathrm{e}^{-xz}\frac{x^2}{2n}\Big(1+\frac{2x}{3n}+\frac{2x^2}{4n^2}+\dots\Big) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xz}zx^2}{2n(1-q)}. \tag{4}$$

Tokiu būdu

$$I_n^{(2)}(x) \leqslant \frac{x^2}{2n(1-q)}\int_0^\infty z\mathrm{e}^{-xz}\,\mathrm{d}A_n(nz). \tag{5}$$

Pertvarkome dėmenį $I_n^{(1)}(x)$:

$$I_n^{(1)}(x) = \int_0^\infty \big(A_n(nz)-A(z)\big)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-xz} = x\int_0^\infty \big(A(z)-A_n(nz)\big)\mathrm{e}^{-xz}\,\mathrm{d}z. \tag{6}$$

Iš (5), (6) ir (3) išplaukia teoremos antrosios dalies įrodymas.

3. Pavyzdys

Tarkime, kad

$$P(N_n=k)=\frac{1}{n},\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Tada

$$A_n(nx) = x - \frac{\{nx\}}{n},$$

čia $\{x\}$ – skaičiaus x trupmeninė dalis.

$$A(x)-A_n(nx)=\frac{\{nx\}}{n}\leqslant\frac{1}{n};\quad I_n^{(1)}(x)\leqslant\frac{1}{n};\quad I_n^{(2)}(x)\leqslant\frac{x^2}{4n(1-q)}\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

4. Spręstini uždaviniai

1. Bendrosios skirstinio funkcijos $P(\widehat{W}_{N_n}<x,\widehat{Z}_{N_n}<y)$ asimptotinė analizė.
2. k-tųjų ekstremaliųjų reikšmių

$$\widetilde{X}_{k,n}=nF(X_{k,n})\ \text{ ir }\ \widetilde{X}_{n-k+1,n}=n\big(1-F(X_{n-k+1,n})\big)$$

asimptotinė analizė. Jų bendrųjų skirstinių analizė.

Literatūra

1. A. Aksomaitis, Rate of convergence in the transference max-limit theorem, in: *Prob. Theory and Math. Stat. Proceedings*, VSPITEV (1994), pp. 1–4.
2. H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press (1946).
3. M.R. Leadbetter *et al.*, *Extreme and Related Properties of Random Sequences and Processes*, New York, Heldelberg, Berlin (1986).
4. E. Pantcheva, Limit theorems for extreme order statistics under non-linear normalization, in: *Lect. Notes Math.*, Bd 1155-3 (1986), pp. 289–309.
5. В.М. Золоторев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, Наука, Москва (1986).

SUMMARY

A. Aksomaitis. Asymptotical analysis of Cramer's transforms for extrema

Asymptotic of normalized extrema of independent identically distributed random variables is analyzed. Normalization – Cramer's transforms [2].

Keywords: extremes, Cramer's transforms, rate of convergence.