Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.,* 2007, 526–530

О формуле Стирлинга

Юозас Ювенциюс МАЧИС (MII)
e-mail: jmacys@ktl.mii.lt

Резюме. Обсуждается естественность подходов к выводу формулы Стирлинга. Элементарно доказывается очень точный вариант формулы, относительная погрешность которого не превышает $1/(1260n^5)$.

Ключевые слова: факториал, формула Стирлинга, формула Уоллиса, относительная погрешность.

Обычно в курсах математического анализа формула Стирлинга (точнее – Стерлинга (J. Stirling, 1692–1770)) доказывается следующим образом: «угадывается», что

$$\log n! \sim (n + 1/2)\log n - n, \tag{1}$$

а тогда изучается разность

$$d_n = \log n! - (n + 1/2)\log n + n.$$

Оказывается, что d_n имеет предел $C = \lim d_n$, поэтому

$$n! \sim \mathrm{e}^c n^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n}.$$

Из формулы Уоллиса (J. Wallis, 1616–1703) легко следует, что $\mathrm{e}^c = \sqrt{2\pi}$, и получаем привычную запись формулы Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n.$$

Эту формулу можно уточнить, оценивая d_n:

$$\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n < n! < \sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n \mathrm{e}^{1/(12n)}. \tag{2}$$

Видим, что относительная погрешность формулы имеет порядок $1/n$, точнее, близка к $1/(12n)$. Именно эта формула приводится в большинстве курсов анализа (см., например, [1], стр. 373) и справочниках (см., например, [6], стр. 637; к сожалению, уточненная формула здесь приведена с ошибкой: вместо $1/(360n^2)$ должно стоять $1/(360n^3)$).

Феллер (W. Feller, 1906–1970) неоднократно возвращался к доказательству формулы Стирлинга (см. [2], [3], [4]), пытаясь также прояснить, как же подойти к формуле (1) наиболее естественным образом.

В своем курсе теории вероятностей [2] он приводит доказательство, предложенное Х. Роббинсом [5]. В нем очевидное неравенство

$$\int_{k-1}^{k} \log x \, \mathrm{d}x < \log k < \int_{k}^{k+1} \log x \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

суммируется по $k = 1, 2, \ldots, n$, и поскольку первообразная $\log x$ равна $x \log x - x$, то получается

$$n \log n - n < \log n! < (n+1) \log(n+1) - n. \tag{4}$$

Отсюда делается вывод о естественности рассмотрения среднего арифметического крайних членов этого неравенства или эквивалентной ему величины $(n + 1/2) \log n - n$. Разумеется, при известном ответе возможно и такое объяснение, но вряд ли оно проясняет суть дела. Уж проще сослаться на перекликающееся с (3) соотношение

$$\log k = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \log k \, \mathrm{d}x \approx \int_{k-1/2}^{k+1/2} \log \mathrm{d}x,$$

и суммируя получить для $n!$ приближение $(n + 1/2) \log(n + 1/2) - n$ или эквивалентное выражение $(n + 1/2) \log n - n$.

Покажем, что при помощи простейшей оценки логарифма d_n удается заключить в интервал конечной длины (в (4) длина интервала превышает $\log n$, следовательно, бесконечно возрастает). Нам понадобится известная оценка

$$x - x^2/2 < \log(1 + x) < x - x^2/2 + x^3/3 \quad (0 < x \leqslant 1), \tag{5}$$

которую легко проверить при помощи производной. Имеем

$$\begin{aligned}
\log n! &= \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n \\
&= [\log 1 - \log 2] + 2[\log 2 - \log 3] + 3[\log 3 - \log 4] + \cdots \\
&\quad + (n-1)[\log(n-1) - \log n] + n \log n \\
&= n \log n - (n-1) \log(n/(n-1)) - (n-2) \log((n-1)/(n-2)) - \cdots \\
&\quad - 3 \log(4/3) - 2 \log(3/2) - \log(2/1) \\
&= n \log n - (n-1) \log(1 + 1/(n-1)) - (n-2) \log(1 + 1/(n-2)) - \cdots \\
&\quad - 2 \log(1 + 1/2) - \log(1 + 1).
\end{aligned}$$

Согласно оценке (5)

$$1/k - 1/2k^2 < \log(1 + 1/k) < 1/k - 1/2k^2 + 1/3k^3, \tag{6}$$

поэтому

$$-1 + 1/2k - 1/3k^2 < -k \log(1 + 1/k) < -1 + 1/2k,$$

и суммируя получаем

$$n\log n-(n-1)+(1/2)\cdot\bigl(1+1/2+1/3+\dots+1/(n-1)\bigr)$$
$$-(1/3)\cdot\bigl(1+1/2^2+1/3^2+\dots+1/(n-1)^2\bigr)$$
$$<\log n!<n\log n-(n-1)+(1/2)\cdot\bigl(1+1/2+1/3+\dots+1/(n-1)\bigr).$$

Но (6) дает (формулу также можно проверить при помощи производной)

$$\log(k+1)-\log k<1/k<\log k-\log(k-1),$$

и суммируя получаем

$$\log n-\log 2<1/2+1/3+\dots+1/(n-1)<\log(n-1).$$

Поскольку

$$1+1/2^2+1/3^2+\dots+1/(n-1)^2$$
$$<1+(1-1/2)+(1/2-1/3)+\dots+\bigl(1/(n-2)-1/(n-1)\bigr)<2,$$

то

$$n\log n-n+1+(1/2)\cdot(1+\log n-\log 2)-2/3$$
$$<\log n!<n\log n-n+1+(1/2)\cdot\bigl[1+\log(n-1)\bigr],$$
$$(n+1/2)\log n-n+5/6-1/2\log 2<\log n!<(n+1/2)\log n-n+3/2,$$

т.е.

$$(n+1/2)\log n-n<\log n!<(n+1/2)\log n-n+3/2.$$

Итак, мы заключили d_n в конечный интервал: $0<d_n<3/2$.

Оценка в формуле Стирлинга теперь зависит от точности оценки d_n – в книге В. Феллера [2], стр. 73, приведена малоизвестная оценка из [6]:

$$\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n\mathrm{e}^{1/(12n+1)}<n!<\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n\mathrm{e}^{1/(12n)}. \qquad (7)$$

Точность этой формулы весьма высока – видим, что относительная погрешность равна $(\mathrm{e}^{1/(12n)}-\mathrm{e}^{1/(12n+1)})/\mathrm{e}^{1/(12n+1)}=\mathrm{e}^{1/(144n^2+12n)}-1$, следовательно, меньше $1/(144n^2)$, т.е. меньше $0{,}7n^{-2}\%$ (в [2], стр. 73, неверная точность указана просто из-за арифметической ошибки), и уже для $n=1$ составляет всего 0,7%, для $n=2$ – менее 0,2%, а для $n=5$ – уже менее 0,03%. Например, формула (7) дает

$$0,9958<1!<1,0023,\quad 1,9973<2!<2,0007,\quad 119,969<5!<120,003,$$

и т.д. Учитывая, что факториал – целое число, можем сказать, что выписанные неравенства дают точное значение факториала. Впрочем, эти неравенства и далее позволяют определить точное значение факториала:

длина соответствующего интервала при $n \leqslant 9$ меньше 31, и поскольку факториалы от 5! до 9! делятся на 40, то в него попадет только одно кратное числа 40. Аналогично для $n = 10$ длина интервала в (7) меньше чем 194, а 10! заведомо является кратным числа 200.

Оказывается, формулу (7) можно уточнить. Из соотношения

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \frac{1}{7(2n+1)^6} + \cdots$$

следует, что (см. [2], стр. 73)

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12n+13} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12n+12},$$

и получаем формулу (7). Поскольку

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} - \frac{1}{12n} + \frac{1}{12n+12} \\
&\quad = \frac{1}{12n^2+12n+3} + \frac{1}{5(2n+1)^4} - \frac{1}{12n^2+12n} \\
&\quad = -\frac{3}{(12n^2+12n+3)(12n^2+12n)} + \frac{1}{5(2n+1)^4} \\
&\quad \sim -\frac{3}{144n^4} + \frac{1}{80n^4} = -\frac{1}{120n^4} \sim -\frac{1}{360n^3} + \frac{1}{360(n+1)^3},
\end{aligned}$$

то проверяем, выполняется ли неравенство

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} - \frac{1}{12n} + \frac{1}{12n+12} + \frac{1}{360n^3} - \frac{1}{360(n+1)^3} > 0:$$

умножив его на $360(2n+1)^4 n^3 (n+1)^3$ и раскрыв скобки, убеждаемся, что оно эквивалентно очевидному неравенству

$$10n^4 + 20n^3 + 21n^2 + 11n + 1 > 0.$$

Это означает, что

$$d_n - d_{n+1} > \frac{1}{12n} - \frac{1}{12n+12} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{360(n+1)^3} > 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \frac{1}{7(2n+1)^6} + \cdots \\
&\quad < \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \frac{1}{7(2n+1)^6(1-(2n+1)^{-2})},
\end{aligned}$$

и поскольку неравенство

$$\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\frac{1}{28(2n+1)^4n(n+1)}<\frac{1}{1260}\Big(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{(n+1)^5}\Big)$$

эквивалентно неравенству

$$163n^6+489n^5+604n^4+393n^3+141n^2+26n+2>0,$$

то

$$d_n-d_{n+1}<\frac{1}{12n}-\frac{1}{12n+12}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{360(n+1)^3}+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1260(n+1)^5}.$$

Поэтому

$$\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n\mathrm{e}^{1/(12n)-1/(360n^3)}<n!<\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n\mathrm{e}^{1/(12n)-1/(360n^3)+1/(1260n^5)}.$$

Видим, что относительная погрешность этой формулы меньше $1/(1260n^5)$.

Литература

1. Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, II, Москва, Физматгиз (1959).
2. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее применения*, Москва, Мир (1984).
3. W. Feller, A direct proof of Stirling's formula, *Amer. Math. Monthly*, **74**, 1223–1225 (1967).
4. W. Feller, Correction, *Amer. Math. Monthly*, **75**, 518 (1968).
5. H.E. Robbins, Remark on Stirling's formula, *Amer. Math. Monthly*, **62**, 26–29 (1955).
6. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Москва, Наука (1970).

REZIUMĖ

J.J. Mačys. Stirlingo formulės klausimu

Aptariamas Stirlingo formulės išvedimo būdų natūralumas. Elementariai įrodomas labai tikslus formulės variantas, kurio santykinis tikslumas yra $1/(1260n^5)$.

SUMMARY

J.J. Mačys. On Stirling's formula

Approaches to the proof of Stirling's formula are compared. Elementary proof of very exact variant of formula (with relative error $1/(1260n^5)$) is given.

Keywords: factorial, Stirling's formula, Wallis' formula, relative error.