# Laipsninės-logaritminės eilės begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys pusplokštumei

Petras ALEKNA (ŠU)
el. paštas: mat.kat@fm.su.lt

Spręsime kraštinį Rymano uždavinį: rasti dalimis analizines ir aprėžtas funkcijas $\Phi^{\pm}(z) \not\equiv 0$ pusplokštumėse $D^{\pm}$, kurių ribinės reikšmės $\Phi^{\pm}(t)$ realiosios ašies taškuose tenkina kraštinę sąlygą

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

kai duotosios funkcijos $G(t)$, $g(t)$ yra Hiolderio klasės ir tenkina sąlygas:

$$\ln|G(t)|, \quad g(t) \in H[-\infty;\ \infty]; \quad \ln|G(0)| = g(0) = 0; \tag{2}$$

$$\arg G(t) \in H[-R;\ R], \tag{3}$$

čia $R > 0$ – pakankamai didelis skaičius;

$$\arg G(t) = \begin{cases} 2\pi\varphi_1(t)|t|^{\rho_1}\ln^{n_1}|t|, & \text{kai} \quad t \leqslant -R, \\ 2\pi\varphi_2(t)t^{\rho_2}\ln^{n_2} t, & \text{kai} \quad t \geqslant R, \end{cases} \tag{4}$$

čia $0 < \rho_k \leqslant \mu_k < 1$, $(k = 1, 2)$, $n_k$ – natūralieji skaičiai,

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) \in H_{\mu_1}[-\infty; -R], \quad \lim\nolimits_{t\to-\infty}\varphi_1(t) = \lambda_1, \\ &\varphi_2(t) \in H_{\mu_2}[R; +\infty], \quad \lim\nolimits_{t\to+\infty}\varphi_2(t) = \lambda_2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Klase $H_{\mu_k}[L_k]$ pažymėta Hiolderio sąlygą tenkinančios funkcijos su Hiolderio rodikliu $\mu_k$ nurodytuose intervaluose $L_1 = [-\infty; -R]$ ir $L_2 = [R; +\infty]$. Sprendinių ieškosime aprėžtų analizinių funkcijų klasėje $\mathcal{B}$ ir klasėje $\mathcal{B}_0(\rho, n) \subset \mathcal{B}$.

Klase $\mathcal{B}_0(\rho, n)$ ([1], p. 53) žymėsime dalimis analizinių funkcijų $\Phi^{\pm}(z)$ klasę, kurioms galioja įvertis

$$|\Phi^{\pm}(z)| \leqslant C_{\Phi}\exp\{-h_{\Phi}r^{\rho(r)}\}, \tag{6}$$

čia $C_{\Phi}, h_{\Phi} > 0$, $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$, $n = \max(n_1, n_2)$,

$$\rho(r) = \max\{\rho_1(r), \rho_2(r)\}, \quad r \in [R, +\infty),\ \rho_k(r) = \rho_k + n_k\frac{\ln\ln r}{\ln r} \tag{7}$$

yra speciali patikslinta eilė.

1 APIBRĖŽIMAS. Dalimis analizinę funkciją

$$X^{\pm}(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(x)\mathrm{d}x}{x(x-z)}\right\}, \quad z \in D^{\pm}, \tag{8}$$

vadiname (1)–(5) kraštinio Rymano uždavinio kanonine funkcija.

Pasinaudoję P. Jurovo [2] gauta Koši tipo integralo asimptotika ($z \to \infty$):

$$\frac{z}{2\pi i}\int_{a}^{+\infty}\frac{\ln^n x}{x^{1-\rho}(x-z)}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^{-i\rho\pi}}{2i\sin\rho\pi} z^{\rho}\sum_{k=0}^{n} C_n^k H_k^*\left(\mathrm{e}^{-2\pi i\rho}\right)(2\pi i)^k \ln^{n-k} z + Q_{n,\rho}(z),$$

čia $Q_{n,\rho}(z)$ – analizinė funckija, $H_k^*(q)$ – Oilerio daugikliai, apibrėžti lygybėmis

$$H_0^*(q) = 1, \quad H_k^*(q) = \frac{1}{(1-q)^k}\sum_{m=1}^{k} A_{k,m} q^{k+1-m},$$

$k = 1, 2, ..., n$; $A_{k,m}$ – Oilerio skaičiai, apskaičiuosime kanoninės funkcijos $X^{\pm}(z)$ apibendrintą indikatorių.

Suformuluosime pagrindinius rezultatus.

1 LEMA. *Galiojant* (2)–(5) *sąlygoms, funkcija*

$$X_2(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{R}^{+\infty}\frac{\ln G(x)\mathrm{d}x}{x(x-z)}\right\}$$

*yra analizinė visiems* $z \overline{\in} [R; \infty)$, *jos speciali patikslinta eilė yra* $\rho_2(r)$ *ir jos apibendrintas indikatorius*

$$h_{X_2}(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|X_2(r\mathrm{e}^{i\theta})|}{r^{\rho_2(r)}} = -\frac{\pi\lambda_2}{\sin\rho_2\pi}\cos\rho_2(\theta-\pi), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{9}$$

2 LEMA. *Galiojant* (2)–(5) *sąlygoms, funkcija*

$$X_1(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-R}\frac{\ln G(x)\mathrm{d}x}{x(x-z)}\right\}$$

*yra analizinė visiems* $z \overline{\in} (-\infty; -R]$, *jos speciali patikslinta eilė yra* $\rho_1(r)$ *ir jos apibendrintas indikatorius*

$$h_{X_1}(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|X_1(r\mathrm{e}^{i\theta})|}{r^{\rho_1(r)}} = \begin{cases} \frac{\pi\lambda_1}{\sin\rho_1\pi}\cos\rho_1\theta, & kai\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ \frac{\pi\lambda_1}{\sin\rho_1\pi}\cos\rho_1(\theta-2\pi), & kai\ \ \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{10}$$

Kanoninės funkcijos $X^{\pm}(z)$ apibendrintą indikatorių nusako

1 TEOREMA. *Jei patenkintos* (2)–(5) *uždavinio sąlygos, kiekvienos iš funkcijų* $X^{+}(z)$ *ir* $X^{-}(z)$*, esant* (7) *patikslintai eilei, jų apibrėžimo srityse apibendrintas indikatorius nusakomas lygybėmis:*

1) *Jei* $\rho_1 > \rho_2$ *arba* $\rho_1 = \rho_2$*, bet* $n_1 > n_2$*, tai*

$$h_{X^+}(\theta) = \frac{\pi\lambda_1}{\sin\rho_1\pi}\cos\rho_1\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$h_{X^-}(\theta) = \frac{\pi\lambda_1}{\sin\rho_1\pi}\cos\rho_1(\theta - 2\pi), \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi;$$

2) *Jei* $\rho_2 > \rho_1$ *arba* $\rho_2 = \rho_1$*, bet* $n_2 > n_1$*, tai*

$$h_{X^\pm}(\theta) = -\frac{\pi\lambda_2}{\sin\rho_2\pi}\cos\rho_2(\theta - \pi), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi;$$

3) *Jei* $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ *ir* $n_1 = n_2 = n$*, tai*

$$h_{X^+}(\theta) = \frac{\pi\lambda_1}{\sin\rho\pi}\cos\rho\theta - \frac{\pi\lambda_2}{\sin\rho\pi}\cos\rho(\theta - \pi), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$h_{X^-}(\theta) = \frac{\pi\lambda_1}{\sin\rho\pi}\cos\rho(\theta - 2\pi) - \frac{\pi\lambda_2}{\sin\rho\pi}\cos\rho(\theta - \pi), \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Išsiaiškinsime, kokios turi būti priklausomybės tarp duotųjų dydžių $\rho_1$, $\rho_2$, $n_1$, $n_2$ ir $\lambda_1$, $\lambda_2$, kad homogeninis uždavinys ($g(t) \equiv 0$), esant (2)–(5) sąlygoms, būtų išprendžiamas klasėje $\mathcal{B}_0(\rho, n)$.

Žinoma ([1], p. 60), kad homogeninio uždavinio sprendinys $\Phi^{\pm}(z) \in \mathcal{B}_0(\rho, n)$ išreiškiamas formule

$$\Phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z)F(z), \tag{11}$$

čia $X^{\pm}(z)$ yra (8) kanoninė funkcija, $F(z)$ – sveikoji funkcija, kurios patikslinta eilė $\rho_F(r) \leqslant \rho(r)$.

2 TEOREMA. *Tam, kad laispninės-logaritminės eilės begalinio indekso homogeninis kraštinis Rymano uždavinys pusplokštumei* (1)–(5) *būtų išprendžiamas klasėje* $\mathcal{B}_0(\rho, n)$*, būtina ir pakankama, kad būtų išpildyta viena iš sąlygų:*

1) $\rho_1 > \rho_2$ *arba* $\rho_1 = \rho_2$*,* $n_1 > n_2$*, ir* $\lambda_1 < 0$*;*

2) $\rho_2 > \rho_1$ *arba* $\rho_2 = \rho_1$*,* $n_2 > n_1$ *ir* $\lambda_2 > 0$*;*

3) $0 < \rho_1 = \rho_2 = \rho < \frac{1}{2}$*,* $n_1 = n_2 = n$ *ir* $\lambda_1\lambda_2 > 0$*,* $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\operatorname{sgn}\lambda_k} < \cos\rho\pi$*;*

4) $\frac{1}{2} < \rho_1 = \rho_2 = \rho < 1$*,* $n_1 = n_2 = n$ *ir* $\lambda_1 < 0$*,* $\lambda_2 > 0$*.*

Šios sąlygos gaunamos iš klasės $\mathcal{B}_0(\rho, n)$ apibėžimo, pareikalavus, kad kanoninės funkcijos $X^{\pm}(z)$ apibendrintas indikatorius būtų neigiamas. Nehomogeninio kraštinio

Rymano uždavinio (1)–(5) bendrasis sprendinys klasėje $\mathcal{B}$ išreiškiamas formule

$$\Phi^{\pm}(z) = \Phi_0^{\pm}(z) + \Psi^{\pm}(z), \tag{12}$$

kurioje $\Phi_0^{\pm}(z)$ yra nehomogeninio uždavinio (1) - (5) atskirasis sprendinys, nusakomas formule ([1], p. 108):

$$\Phi_0^{\pm}(z) = \frac{\Psi_0^{\pm}(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{\Psi_0^{+}(x)(x-z)}\mathrm{d}x, \tag{13}$$

čia $\Psi_0^{\pm}(z) = F_0(z)X^{\pm}(z)$ yra homogeninio uždavinio atskirasis sprendinys klasėje $\mathcal{B}$. Norėdami rasti nehomogeninio uždavinio atskirąjį sprendinį $\Phi_0^{\pm}(z)$, reikia parinkti sveikąją funkciją $F_0(z)$ taip, kad integralas (13) lygybėje konverguotų, homogeninio uždavinio atskirasis sprendinys $\Psi_0^{\pm}(z) \in \mathcal{B}$ ir sveikosios funkcijos $F_0(z)$ nuliai nebūtų realūs.

3 TEOREMA. *Laispninės-logaritminės eilės plius-begalinio indekso* ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$) *kraštinis Rymano uždavinys pusplokštumei* (1)–(5) *klasėje* $\mathcal{B}$ *turi be galo daug sprendinių, išreiškiamų formule*

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)F_0(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)\mathrm{d}x}{X^{+}(x)F_0(x)(x-z)} + X^{\pm}(z)F(z),$$

*kurioje* $X^{\pm}(z)$ – (8) *kanoninė funkcija, o sveikoji funkcija* $F_0(z)$ *nusakoma lygybėmis:*

$$F_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right), \quad \arg z_k = \theta_{F_0} = \frac{1}{\rho}\arccos\frac{\lambda_2 - \lambda_1\cos\rho\pi}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\rho\pi}},$$

$|z_k| = r_k$ *yra lygties* $\Delta_{F_0} r^{\rho}\ln^n r = k$, $k = 1, 2, \ldots$ *didžiausioji teigiama šaknis, čia*

$$\Delta_{F_0} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\rho\pi}$$

*yra sveikosios funkcijos* $F_0(z)$ *nulių išdėstymo spindulyje* $\arg z = \theta_{F_0}$ *tankis;* $F(z)$ – *bet kuri sveikoji funkcija eilės* $\rho_F \leqslant \rho$, *kuriai realiojoje ašyje teisingas asimptotinis įvertis* ($C_F = \mathrm{const}$)

$$\ln|F(t)| \leqslant \begin{cases} \frac{\pi}{\sin\rho\pi}(\lambda_2 - \lambda_1\cos\rho\pi)|t|^{\rho(t)} + C_F, & t \to -\infty; \\ \frac{\pi}{\sin\rho\pi}(\lambda_2\cos\rho\pi - \lambda_1)|t|^{\rho(t)} + C_F, & t \to +\infty. \end{cases}$$

## Literatūra


1. P. Alekna, *Begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys*, ŠU (2004).
2. М.Г. Юров, Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях, *Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук*, **3**, 67–74 (1967).

SUMMARY

***P. Alekna. The boundary Riemann problem of the power-logarithmic order of infinity index for the half-plane***

The boundary Riemann problem of the power-logarithmic order of infinity index for the half-plane in the class $\mathscr{B}$ of bounded analytic functions and in the class $\mathscr{B}_0(\rho, n) \subset \mathscr{B}$, is investigated. Also, the necessary and sufficient conditions for the solution of this problem in the class $\mathscr{B}_0(\rho, n)$, are obtained.

*Keywords:* boundary Riemann problem, infinity index, class $\mathscr{B}$ of bounded analytic functions.