Об оценке времени разрушения решения нелинейного уравнения Шредингера

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)
e-mail: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Резюме. Рассматривается нелинейное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i|u|^p u, \quad t > 0$$

с начальным условием $u(0,x) = u_0(x)$, $x \in R^n$, $n = 1$. Найдена начальная функция $u_0(x)$ такая, что при увеличении p, оценка верхнего предела времени разрушения решения увеличивается в некотором интервале $4 < p < p_0$.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелинейная задача, взрыв (коллапс).

В одномерном пространстве рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i|u|^p u, \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{2}$$

в суперкритическом случае $p > 4$. Здесь $u(t,x)$ – неизвестная функция из H_1, $x \in R$, $i = \sqrt{-1}$, Δ – вторая производная по x.

Известно, что при $p \geqslant 4/n$ существует взрывающееся решение, т.е. существуют функция u_0 и конечное число T такие, что

$$\lim_{t\to T} \|\nabla u(t,x)\|_2 = \infty, \quad \lim_{t\to T} \|u(t,x)\|_\infty = \infty.$$

Если $1 < p < 4/n$, то любое решение задачи (1), (2) является глобальным, т.е. $\|\nabla u(t,x)\|_2 < \infty$ и $\|u(t,x)\|_\infty < \infty$, если $t < \infty$.

Известно [1], что

$$\Phi(u(t)) \leqslant npI_2t^2 + \Phi'(u(0))t + \Phi(u(0)). \tag{3}$$

Верхним пределом времени разрушения решения задачи (1), (2) является нуль функции правой части неравенства (3). Обозначим этот нуль через $T(p)$. В нашем случае $n=1$, $\Phi'(u(0))=0$, получаем

$$T(p)=\sqrt{-\frac{\Phi(u(0))}{pI_2}}.$$

Если при достаточно малых p решение задачи (1), (2) всегда является глобальным, а при достаточно больших p и той же самой $u_0(x)$ уже может и не быть глобальным, то возникает вопрос, уменшится ли оценка верхнего предела разрушения решения, если $u_0(x)$ фиксировать, а p увеличивать.

В настоящей работе дан отрицательный ответ: найдена начальная функция $u_0(x)$ такая, что при увеличении p в некотором интервале $4<p<p_0$, оценка верхнего предела разрушения решения увеличивается, т.е. $T(p_1)>T(p_2)$, если $4<p_2<p_1<p_0$.

Результаты статьи можно обобщить для n-мерного случая.

Теорема. *Существует начальная функция $u_0(x)$ и константа p_0 такая, что при увеличении p в некотором интервале $4<p<p_0$, оценка верхнего предела разрушения решения увеличивается, т.е. $T(p_1)>T(p_2)$, если $4<p_2<p_1<p_0$.*

Доказательство. Начальной функции u_0 будем искать такого вида

$$u_0(r)=\begin{cases} a, & r\leqslant l,\\ l+a-r, & l\leqslant r\leqslant l+a,\\ 0, & r>l+a,\end{cases}$$

где l и a неизвестные положительные константы, $r=|x|$.

Обозначим

$$\Phi(u)=\int_{R^n}|x|^2|u|^2\,\mathrm{d}x,$$

$$I_1(u)=\int_{R^n}|u|^2\,\mathrm{d}x,$$

$$I_2(u)=\int_{R^n}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{2}{p+2}\int_{R^n}|u|^{p+2}\,\mathrm{d}x.$$

I_1, I_2 не зависит от t, если u решение задачи (1), (2).

Находим интегралы

$$\int_{R^n}|\nabla u_0|^2\,\mathrm{d}x=2a,$$

$$\int_{R^n}|u_0|^{p+2}\,\mathrm{d}x=2a^{p+2}l+\frac{2a^{p+3}}{p+3}.$$

Из условия взрыва $I_2 < 0$ получаем неравенство

$$2a - \frac{2}{p+2}\left(2a^{p+2}l + \frac{2a^{p+3}}{p+3}\right) < 0. \tag{4}$$

Функция $T(p)$ будет возростающей, если $T'(p) > 0$. Из этого неравенства получаем $I_2 + p(I_2)'_p > 0$ или

$$\int_{R^n} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \frac{2}{p+2}\int_{R^n} |u|^{p+2}\,\mathrm{d}x + \frac{2p}{(p+2)^2}\int |u|^{p+2}\,\mathrm{d}x$$
$$- \frac{2p}{p+2}\int_{R^n} |u|^{p+2}\ln|u|\,\mathrm{d}x > 0. \tag{1}$$

Если $a < 1$, то последний интеграл левой части неравенства (5) отрицательный. Для докозательства теоремы достаточно убедится, что система неравенств (4), (5) имеет решение, напр., $a = 1/2$, $p_0 = 5$, $l = 700$. При этих данных левая часть неравенства (4) не больше -1.

Теорема доказана.

Литература

1. А. Домаркас, О разрушении решений системы нелинейных уравнений Шредингера, *Liet. matem. rink.*, **35**(2), 181–189 (1995).

REZIUMĖ

G. Puriuškis. Apie Šredingerio lygties sprendinio sprogimo laiko įverti

Nagrinėjama Šrėdingerio lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i|u|^p u, \quad t > 0$$

su pradine sąlyga $u(0,x) = u_0(x)$, $x \in R^n$, $n = 1$. Surasta $u_0(x)$ tokia, kad didėjant p, sprendinio sprogimo laiko įvertis didėja tam tikrame intervale $4 < p < p_0$.

SUMMARY

G. Puriuškis. On the blow up time estimation to the Shrodinger equation

There is considered the Shrodinger equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i|u|^p u,\ t > 0$$

with initial condition $u(0,x) = u_0(x)$, $x \in R^n$, $n = 1$. We prove the existence of the $u_0(x)$ such, that the blow up time estimation increases if p increases in the intervale $4 < p < p_0$.

Keywords: Schrödinger equations, nonlinear problem, critical power, global solution, blow up.