Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 89–92

Euklidinės 4-matės erdvės hiperbolinio tipo normalieji beveik kontaktiniai metriniai hiperpaviršiai

Angelė BAŠKIENĖ (ŠU)
el. paštas: baskiene@fm.su.lt

1. Beveik kontaktines metrines struktūras daugelį metų tyrinėja Y. Hatakeyama, Y. Tashiro, M. Okumura ir kiti matematikai [4–7]. S. Sasaki ir jo mokiniai tyrė normaliąsias kontaktines metrines struktūras, kurios vėliau buvo pavadintos Sasakio struktūromis. Jos indukuojasi euklidinės erdvės hipersferose.

M. Okumura [4] įrodė, jog be hipersferų, daugiau hiperpaviršių, turinčių Sasakio struktūrą, euklidinėje erdvėje nėra.

1968 m. buvo pradėti tyrinėti beveik kontaktinių struktūrų hiperboliniai analogai, žinomoms struktūroms suteikiant elipsinio tipo struktūrų vardą [1, 3]. Šio darbo tikslas – surasti visus euklidinės 4-matės erdvės hiperpaviršius, turinčius hiperbolinio tipo normaliąją beveik kontaktinę metrinę struktūrą, o taip pat ir visus hiperbolinio tipo Sasakio hiperpaviršius.

2. Panagrinėkime keturmatę euklidinę erdvę $E_4(x^i)$, $i, j, k... = 1, 2, 3, 4$, kurios metrinis tenzorius G_{ij} turi pavidalą

$$(G_{ij}) = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \quad (I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tarkime, jog šioje erdvėje duotas afinorius F_i^j, kurio matrica yra

$$(F_i^j) = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

Kadangi $F_i^j F_j^k = \delta_i^k$, $F_i^k G_{kj} = F_{ij} = -F_{ji}$, tai E_4 yra hiperbolinė A-erdvė [2].

Hiperpaviršių $M_3 \subset E_4$ apibrėžkime lygtimi

$$x^4 = f(x^a), \quad a, b, c, \ldots = 1, 2, 3.$$

Normalizuokime hiperpaviršių ε-vienetiniu neizotropiniu normaliniu vektoriumi

$$C^i\{f_3, -1, f_1, f_2\}/\sqrt{2|f_1 f_3 - f_2|}, \quad f_a = \frac{\partial f}{\partial x^a}.$$

Liečiamuosius hiperpaviršiaus vektorius $B_a^i = \delta_a^i + \delta_4^i f_a$ ir normalizuojantį vektorių C^i paveikę afinoriumi F_i^j, gautus vektorius išreiškę tiesiškai nepriklausomais vektoriais B^i_a, C^i, iš lygčių

$$F^j_i B^i_a = \varphi^b_a B^j_b + \eta_a C^j, \quad F^j_i C^i = -\xi^a B^j_a$$

randame hiperpaviršiuje M_3 tenzorius

$$(\varphi^b_a) = \frac{1}{f_1 f_3 - f_2}\begin{pmatrix} -f_2 & f_1 & -f_1^2 \\ -f_2 f_3 & f_1 f_3 & -f_1 f_2 \\ 0 & 0 & -(f_1 f_3 - f_2) \end{pmatrix},$$

$$\xi^b = \frac{1}{\sqrt{2|f_1 f_3 - f_2|}}(f_3, -1, -f_1),$$

$$\eta_a = -\frac{2\varepsilon}{\sqrt{2|f_1 f_3 - f_2|}}(f_1, f_2, 0), \quad \varepsilon = \frac{f_1 f_3 - f_2}{|f_1 f_3 - f_2|} = \pm 1. \tag{1}$$

Hiperpaviršiuje indukuojasi neišsigimusi metrika $g_{ab} = G_{ij} B^i_a B^j_b$, kurios matrica yra

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 1 \\ f_1 & 2f_2 & f_3 \\ 1 & f_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ir asimptotinis tenzorius

$$h_{ab} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2|f_1 f_3 - f_2|}} f_{ab}, \quad f_{ab} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^a \partial x^b}. \tag{3}$$

Kadangi tenzoriai (1) ir (2) tenkina sąlygas

$$\varphi^b_a \varphi^c_b = \delta^c_a + \xi^c \eta_a, \quad \xi^c \eta_c = -1, \quad \varphi^c_a \eta_c = \varphi^c_a \xi^a = 0,$$

$$\varphi^c_a g_{bc} = -\varphi^b_c g_{ba}, \quad g_{ab}\xi^b = \varepsilon \eta_a, \tag{4}$$

tai apibrėžia normalizuotame hiperpaviršiuje $M_3 \subset E_4$ hiperbolinio tipo I rūšies beveik kontaktinę metrinę struktūrą [3].

3. Ieškosime hiperpaviršių, turinčių normaliąją beveik kontaktinę metrinę struktūrą, t.y. tenkinančią sąlygą [3]:

$$h_{cb}\varphi^b_a + h_{ab}\varphi^b_c = 0. \tag{5}$$

Įrašę (1) ir (3) į (5), gauname diferencialinių lygčių sistemą

$$f_{33} = 0,$$

$$f_{23} = f_1 f_{13},$$

$$f_1 f_{21} - f_2 f_{11} = f_1^2 f_{13},$$

$$f_2 f_{21} - f_1 f_{22} = -f_1 f_2 f_{13}, \tag{6}$$

nusakančią būtinas ir pakankamas sąlygas, kad hiperpaviršius $M_3 \subset E_4$ turėtų hiperbolinio tipo I rūšies normaliąją beveik kontaktinę metrinę struktūrą.

Įrodysime, jog iš (6) formulių išplaukia, jog $f_{11} f_{13} = 0$.

Diferencijuodami (6) lygtis pagal kintamuosius x^a ir vėl taikydami (6) formules gauname, jog

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \ f_{231} = f_{31}^2 + f_3 f_{113}, \quad f_{abc} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c},\\
&\text{b)}\ \ f_{232} = 2 f_3 f_{13}^2 + f_3^2 f_{113},\\
&\text{c)}\ \ f_{13} f_{21} + f_1 f_{231} - f_{23} f_{11} - f_2 f_{113} = 2 f_1 f_{13}^2,\\
&\text{d)}\ \ f_{23} f_{21} + f_2 f_{213} - f_{13} f_{22} - f_1 f_{223} = -f_{13}^2 f_2 - f_1 f_{23} f_{13}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Jei $f_1 = 0$ arba $f_3 = 0$, tuomet $f_{11} f_{13} = 0$. Tarkime, jog $f_1 f_3 \neq 0$. Tada iš (6), (7a) ir (7c) formulių $f_{113} = \frac{f_{11} f_{13}}{f_1}$, o iš (6), (7b) ir (7d) $f_{113} = \frac{f_{13}(f_{21} - f_1 f_{13})}{f_1 f_3} = \frac{f_{11} f_{13} f_2}{f_1^2 f_3}$. Sulyginę dalinės išvestinės f_{113} dešiniąsias puses gauname, jog

$$\frac{f_{11} f_{13}(f_2 - f_1 f_3)}{f_1^2 f_3} = 0 \quad \text{arba} \quad f_{11} f_{13} = 0, \quad \text{nes} \quad f_1 f_3 - f_2 \neq 0.$$

4. Sprendžiant (6) lygtį galimi tokie atvejai.

I. Tarkime, jog $f_{13} \neq 0$. Tada $f_{11} = 0$ ir (6) lygčių sistema turi pavidalą

$$f_{33} = f_{11} = 0, \quad f_{23} = f_3 f_{13}, \quad f_{12} = f_1 f_{13}, \quad f_{22} = 2 f_2 f_{13}. \tag{6$'$}$$

Iš (2), (3) ir (6$'$) išplaukia, jog $h_{ab} = \varepsilon \lambda g_{ab}$, $\lambda = \frac{f_{13}}{\sqrt{2|f_1 f_3 - f_2|}}$ =const$\neq 0$, t.y. (6$'$) lygčių sistema apibrėžia hipersferą S_3, kurios lygtis yra $(x^1 - a)(x^3 - c) + (x^2 - b)(x^4 - d) = k$ =const $\neq 0$ arba $x^4 = \frac{-x^1 x^3 + c x^1 + a x^3 + l}{x^2 - b} + d$, $l + ac \neq 0$.

II. Jei $f_{13} = 0$, tuomet (6) lygčių sistema supaprastėja:

$$f_{33} = f_{13} = f_{23} = 0, \quad f_1 f_{21} - f_2 f_{11} = 0, \quad f_2 f_{12} - f_1 f_{22} = 0. \tag{6$''$}$$

Jos sprendinys yra $f = c x^3 + F(a x^1 + b x^2 + d)$, $F' \neq 0$, $b \neq ac$, kur $F(z)$ – bet kuri vieno kintamojo funkcija.

Pateiksime keletą hiperpaviršių $x^4 = f(x^a)$, kuriems $f_{13} = 0$, pavyzdžių.

1. Jei $f_{11} = 0$, t.y. $F'' = 0$, hiperpaviršius $x^4 = c x^3 + a x^1 + b x^2 + d$ yra hiperplokštuma E_3.

2. Kai $\frac{\sqrt{2|f_1 f_3 - f_2|}\ f_{11}}{f_1^2}$ =const $\neq 0$, funkcija $F(z)$ randama iš diferencialinės lygties $F''(F')^{-\frac{3}{2}}$ =const$\neq 0$, iš kur $F(z) = \frac{k}{z} + e$, $k \neq 0$. Hiperpaviršiaus lygtis yra $x^4 = c x^3 + \frac{k}{a x^1 + b x^2 + d} + e$, t.y. hiperpaviršius yra cilindras $S_1 \times E_2$.

1 TEOREMA. *Hiperbolinio tipo A-erdvės E_4 hiperpaviršius turi hiperbolinio tipo I rūšies normaliąją beveik kontaktinę metrinę struktūrą tada ir tik tada, kai jis yra arba hipersfera arba hiperpaviršiaus lygtis yra $x^4 = c x^3 + F(a x^1 + b x^2 + d)$, F – bet kuri viena kintamojo funkcija, $F' \neq 0$, $b \neq ac$.*

Tarkime, jog hiperpaviršius $M_3 \subset E_4$ turi normaliąją kontaktinę metrinę struktūrą (hiperbolinio tipo Sasakio struktūrą [3]), t.y. be (6) lygybių galioja sąlyga

$$h_{ab} = \alpha g_{ab} + \beta \eta_a \eta_b, \quad \alpha = \text{const} \neq 0, \quad \beta - \text{bet kuri funkcija.}$$

Tuomet iš (1), (2), (3) ir (6) turime, jog $\alpha = \frac{\varepsilon f_{13}}{\sqrt{2|f_1 f_3 - f_{21}|}} = \text{const} \neq 0, \quad \beta = 0$, ir hiperpaviršius yra hipersfera S_3.

2 TEOREMA. *Hiperbolinio tipo A-erdvės E_4 hiperpaviršius turi hiperbolinio tipo Sasakio struktūrą tada ir tik tada, kai jis yra hipersfera S_3.*

Literatūra

1. А. Башкене, Нормальные почти контактные метрические структуры гиперболичсеского типа 1 рода на гиперповерхностях пространства постоянной аналитической кривизны гиперболического типа, *Liet. matem. rink.*, **45**(1), 22–32 (2005).
2. В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Щурыгин, *Пространства над алгебрами*, Изд. Казанского ун-та (1985).
3. А. Крищюнайте, Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, *Уч. зап. Казанского ун-та*, **128**(3), 55–75 (1968).
4. M. Okumura, Certain almost contact hypersurfaces in Euclidean spaces, *Kodai Math. Semin. Repts.*, **16**, 44–54 (1964).
5. M. Okumura, Certain almost contact hypersurfaces in Kahlerian manifolds of constant holomorphic sectional curvatures, *Tohoku Math. J.*, **16**, 270–284 (1964).
6. S. Sasaki, J. Hatakeyama, On differentiable manifolds with certain structures, which are closely related to almost contact structure, II, *Tohoku Math. J.*, **13**, 281–294 (1961).
7. M.M. Tripathi, S.S. Shukla, On submanifolds of Lorentzian almost paracontact manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, **59**(3–4), 327–338 (2001).

SUMMARY

A. Baškienė. Hyperbolic normal almost contact metric hypersurfaces in Euclidean 4-dimensional space

In Euclidean 4-dimensional space, all hypersurfaces with normal almost contact metric structure of hyperbolic type as well as hyperbolic Sasakian structure are found.

Keywords: hyperbolic A-space, normal almost contact metric structure of hyperbolic type, hyperbolic Sasakian structure.