Liet. matem. rink, **47**, *spec. nr.*, 2007, 104–112

Об одном обобщении детерминанта Вронского

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Резюме. Изучаются свойства специально введенного детерминанта, элементами которого являются разделенные разности различных порядков. Указана тесная связь этого детерминанта с системой Чебышева и дифференциальным уравнением.

1. Пусть

$$u_0(z), \dots, u_n(z), \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

– некоторая система голоморфных в области D функций. Выражение

$$P(z) = c_0 u_0(z) + c_1 u_1(z) + \dots + c_n u_n(z), \tag{2}$$

где не все $c_0, ..., c_n$ равны нулю, назовем обобщенным многочленом. Введем детерминант

$$\big([u_k; z_0, \dots, z_m]\big)_{k,m=0,\dots,n} = \begin{vmatrix} u_0(z_0) & \cdots & u_n(z_0) \\ [u_0(z); z_0, z_1] & \cdots & [u_n(z); z_0, z_1] \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ [u_0(z); z_0, \dots, z_n] & \cdots & [u_n(z); z_0, \dots z_n] \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Здесь (см. [1])

$$\big[u_k(z); z_0, \dots, z_m\big] = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{u_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi - z_0)\dots(\xi - z_m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \tag{4}$$

где Γ – простой замкнутый контур, лежащий в области D и охватывающий все точки $z_0, \dots, z_m \in D$. Выражение (4) называется разделенной разностью m-го порядка функции $u_k(z)$, построенной по точкам $z_0, \dots, z_m \in D$. Детерминант (3) назовем разделенно-разностным детерминантом (сокращенно будем писать РРД) системы функций (1).

Среди точек $z_0, \dots, z_m$ в формуле (4) могут быть и совпадающие между собой точки. В частности, если $z_0 = z_1 = \dots = z_m = \zeta$, то

$$\big[F(z); z_0, \dots, z_m\big] = \frac{1}{m!} F^{(m)}(\zeta).$$

Пусть $z_0, \ldots, z_n \in D$ и попарно различные. Известны также следующие формулы (см. [1,2,3]):

$$\big[F(z); z_0, \ldots, z_n\big] = \frac{[F(z); z_0, \ldots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \ldots, z_n]}{z_0 - z_n}, \quad \big[F(z); z_0\big] = F(z_0),$$

$$\big[F(z); z_0, \ldots, z_n\big] = \sum_{m=0}^{n} \frac{F(z_m)}{\mu_n'(z_m)}, \quad \text{где} \quad \mu_n(z) = \prod_{p=0}^{n} (z - z_p),$$

$$\big[F(z); z_0, \ldots, z_n\big] = \frac{1}{W(z_0, \ldots, z_n)} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & z_0^{n-1} & F(z_0) \\ 1 & \cdots & z_1^{n-1} & F(z_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & z_n^{n-1} & F(z_n) \end{vmatrix}.$$

Здесь $W(z_0, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & z_0^{n-1} & z_0^n \\ 1 & \cdots & z_1^{n-1} & z_1^n \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & z_n^{n-1} & z_n^n \end{vmatrix}$ – детерминант Вандермонда. Нетрудно установить, что

$$W(z_0, \ldots, z_n) = \prod_{m=0}^{n-1} \mu_m(z_{m+1}) = \prod_{k=1}^{n} \mu_k'(z_k), \quad \text{где} \quad \mu_l(z) = \prod_{p=0}^{l} (z - z_p). \tag{5}$$

Систему голоморфных в области D функций (1) назовем системой Чебышева в области D, если любой нетривиальный обобщенный многочлен (2) имеет в области D не более чем n попарно различных корней (см.[4]).

В данной работе мы изучаем свойства введенного нами РРД, который является естественным обобщением детерминанта Вронского. Мы укажем на тесную связь между РРД и системами Чебышева. Кроме того, коснемся одного свойства фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения.

2. Рассмотрим некоторые свойства РРД.

Свойство 1. *Если $z_0 = z_1 = \ldots = z_n = \zeta$, то РРД превращается в детерминант Вронского*

$$V(z; u_0, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} u_0(z) & \cdots & u_n(z) \\ u_0'(z) & \cdots & u_n'(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_0^{(n)}(z) & \cdots & u_n^{(n)}(z) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

деленный на $1!2!\ldots n!$.

Свойство 2. *Если* $u_0(z) \equiv 1$, $u_1(z) = z, \dots, u_{n-1}(z) = z^{n-1}$, $u_n(z) \equiv F(z)$, *то РРД превращается в разделенную разность* $[F(z); z_0, \dots, z_n]$ *функции* $F(z)$.

Как известно, если функции (1) линейно зависимы, то их детерминант Вронского равен тождественно нулю. Аналогичное свойство имеет и РРД.

Свойство 3. *Если функции* (1) *линейно зависимы в области D, то РРД обращается в нуль при любых* $z_0, \dots, z_n$ *из области D.*

Докажем свойство 3. Так как $u_0(z), \dots, u_n(z)$ линейно зависимы, то существуют не все равные нулю $b_0, \dots, b_n$ (пусть, например, $b_0 \neq 0$), для которых

$$b_0 u_0(z) + \dots + b_n u_n(z) = 0, \quad \forall z \in D.$$

Отсюда получим тождество

$$u_0(z) = c_1 u_1(z) + \ldots + c_n u_n(z).$$

Взяв произвольным образом $z_0, \dots, z_n$ из области D и пользуясь элементарными свойствами разделенных разностей, получим равенства

$$\begin{aligned}
&u_0(z_0) = c_1 u_1(z_0) + \ldots + c_n u_n(z_0),\\
&\big[u_0(z); z_0, z_1\big] = c_1\big[u_1(z); z_0, z_1\big] + \dots + c_n\big[u_n(z); z_0, z_1\big],\\
&\dots\\
&\big[u_0(z); z_0, z_1, \dots z_n\big] = c_1\big[u_1(z); z_0, z_1, \dots, z_n\big] + \dots + c_n\big[u_n(z); z_0, z_1, \dots, z_n\big].
\end{aligned}$$

Умножаем в выражении для РРД второй столбец на $-c_1$, третий столбец – на $-c_2$ и т.д., последний столбец – на $-c_n$ и прибавляем к первому столбцу. Величина РРД при этом не измениться, но первый столбец будет состоять из нулей. Отсюда следует, что РРД обращается в нуль при любых $z_0, \dots, z_n \in D$, что и требовалось доказать.

Введем детерминант, который назовем детерминантом Хаара:

$$\underset{k,m=0,\dots,n}{H\big(u_k(z_m)\big)} = \begin{vmatrix} u_0(z_0) & u_1(z_0) & \cdots & u_n(z_0) \\ u_0(z_1) & u_1(z_1) & \cdots & u_n(z_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_0(z_n) & u_1(z_n) & \cdots & u_n(z_n) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть* $z_0, \dots, z_n$ *– попарно различные точки из области D. Для РРД имеет место формула*

$$\underset{k,m=0,\dots,n}{\big([u_k; z_0, \dots, z_m]\big)} = \frac{\underset{k,m=0,\dots,n}{H(u_k(z_m))}}{W(z_0, \dots, z_n)}. \tag{8}$$

Доказательство. Так как $z_0, \dots, z_n$ – попарно различные точки из области D, то пользуясь элементарными свойствами детерминантов и формулой (5), получим

$$\big([u_k; z_0, \dots, z_m]\big)_{k,m=0,\dots,n} = \begin{vmatrix} u_0(z_0) & \dots & u_n(z_0) \\ \frac{u_0(z_0)}{\eta_1'(z_0)} + \frac{u_0(z_1)}{\eta_1'(z_1)} & \dots & \frac{u_n(z_0)}{\eta_1'(z_0)} + \frac{u_n(z_1)}{\eta_1'(z_1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{u_0(z_0)}{\eta_n'(z_0)} + \dots + \frac{u_0(z_n)}{\eta_n'(z_n)} & \dots & \frac{u_n(z_0)}{\eta_n'(z_0)} + \dots + \frac{u_n(z_n)}{\eta'(z_n)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\underset{k,m=0,\dots,n}{H(u_k(z_m))}}{\eta_0'(z_0)\eta_1'(z_1)\dots\eta_n'(z_n)} = \frac{\underset{k,m=0,\dots,n}{H(u_k(z_m))}}{W(z_0, \dots, z_n)}.$$

Найдем выражение для РРД в случае, когда среди точек $z_0, \dots, z_n \in D$ есть совпадающие между собой точки. Эти точки переобозначим и запишем в виде

$$\underbrace{\xi_0, \dots, \xi_0}_{p_0}, \underbrace{\xi_s, \dots, \xi_s}_{p_s}, \quad p_0 + \dots + p_s = n + 1, \tag{9}$$

где $\xi_0, \dots, \xi_s$ – попарно различные точки.

Кроме этих точек возьмем в области D еще $n+1$ попарно различных точек

$$\xi_i, \xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,p_i-1}, \quad i = 0, \dots, s. \tag{10}$$

Обозначим для удобства $v_0(z) \equiv 1$, $v_1(z) = z, \dots, v_n(z) = z^n$. Введем матрицы

$$U_{p_i}^{[1]} = \begin{matrix} u_0(\xi_i) & \dots & u_n(\xi_i) \\ u_0(\xi_{i,1}) & \dots & u_n(\xi_{i,1}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ u_0(\xi_{i,p_i-1}) & \dots & u_0(\xi_{i,p_i-1}) \end{matrix}, \tag{11}$$

$$U_{p_i}^{[1,p_i]} = \begin{matrix} u_0(\xi_i) & \dots & u_n(\xi_i) \\ u_0'(\xi_i) & \dots & u_n'(\xi_i) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ u_0^{(p_i-1)}(\xi_i) & \dots & u_n^{(p_i-1)}(\xi_i) \end{matrix}, \tag{12}$$

$$V_{p_i}^{[1]} = \begin{matrix} v_0(\xi_i) & \dots & v_n(\xi_i) \\ v_0(\xi_{i,1}) & \dots & v_n(\xi_{i,1}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_0(\xi_{i,p_i-1}) & \dots & v_0(\xi_{i,p_i-1}) \end{matrix}, \tag{13}$$

$$V_{p_i}^{[1,p_i]} = \begin{matrix} v_0(\xi_i) & \dots & v_n(\xi_i) \\ v_0'(\xi_i) & \dots & v_n'(\xi_i) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_0^{(p_i-1)}(\xi_i) & \dots & v_n^{(p_i-1)}(\xi_i) \end{matrix}. \tag{14}$$

Для обозначения матриц мы не пользуемся обычными в этом случае круглыми скобками. В следующей лемме элементы этих матриц войдут в состав специальных детерминантов.

Лемма 2. *Пусть $z_0,\dots,z_n$ – произвольно взятые в области D точки, среди которых могут быть совпадающие между собой точки. Справедливо равенство*

$$\big([u_k; z_0,\dots,z_m]\big)_{k,m=0,\dots,n} = \begin{vmatrix} U_{p_0}^{[1,p_0]} \\ \dots \\ U_{p_s}^{[1,p_s]} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} V_{p_0}^{[1,p_o]} \\ \dots \\ V_{p_s}^{[1,p_s]} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} V_{p_0}^{[1,p_0]} \\ \dots \\ V_{p_s}^{[1,p_s]} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{p_0-1} k! \prod_{k=1}^{p_1-1} k! \dots \prod_{k=1}^{p_s-1} k! \prod_{i>j} (\xi_i - \xi_j)^{p_i p_j} \neq 0. \tag{16}$$

Доказательство. Так как точки (10) попарно различные, то с помощью этих точек и функций (1) можно построить РРД, который обозначим R^*. По лемме 1 его можно записать в виде отношения детерминантов, т.е. в виде

$$R^* = \begin{vmatrix} U_{p_0}^{[1]} \\ \dots \\ U_{p_s}^{[1]} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} V_{p_0}^{[1]} \\ \dots \\ V_{p_s}^{[1]} \end{vmatrix},$$

где элементами детерминантов служат элементы матриц (11) и (13). Вычислим $\lim R^*$ в предположении, что $\xi_{i,j} \to \xi_i$ для каждого j. Все элементы матриц (11), (13) являются голоморфными функциями своих аргументов в области D. Поэтому можно воспользоваться правилом Лопиталя. Проведя все необходимые в таких случаях рассуждения, получим $\lim R* = R$, где R является РРД вида (3), записанный в виде отношения детерминантов, т.е. в виде (15), где элементами детерминантов служат элементы матриц (12) и (14). Мы доказали (15). Что касается формулы (16), то достаточно сослаться на [3] (стр. 43).

3. Приведем два необходимых нам свойства систем Чебышева.

Свойство 4. *Пусть функции* (1) *образуют систему Чебышева в области D и $z_0,\dots,z_{n-1}$ произвольно взятые попарно-различные точки* *из области D. Тогда существует многочлен вида* (2)*, который имеет эти точки своими корнями (см.* [5]*).*

СВОЙСТВО 5. *Функции* (1)*, образующие систему Чебышева в области D, не могут иметь в этой области общего корня (см.* [5]*).*

ЛЕММА 3. *Если функции* (1) *образуют систему Чебышева в области D, то любой многочлен* (2) *имеет в D не более n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность.*

Докажем лемму 3. Согласно определению системы Чебышева, любой многочлен вида (2) имеет в D не более n попарно различных корней. По свойству 4 существует многочлен вида (2), имеющий ровно n попарно различных корней в D. По свойству 5 функции (1) не могут иметь общего корня в D. Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что любой многочлен вида (2) имеет в области D не более n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность. Возьмем какой-либо многочлен $P(z)$ вида (2) и пусть он имеет в области D попарно различные корни $z_1, \dots, z_m$ с соответствующими кратностями $k_1, \dots, k_m$. В противоположность утверждению теоремы, допустим, что $k_1 + \ldots + k_m > n$. Тогда хотя бы один из корней многочлена $P(z)$ вида (2) имеет кратность, большую единицы. Для определенности, пусть $k_i > 1$. Согласно свойству 5, хотя бы одна из функций (1) не равна нулю в точке z_i. Пусть это будет функция $u_j(z)$. Если взять достаточно малые непересекающиеся между собой круговые окрестности $\mathrm{O}(z_p)$ точек z_p, $p = 1, \dots, m$, и достаточно малое по модулю комплексное число a, то по теореме Руше функция $(P(z)/u_j(z)) - a$ будет иметь в каждой окрестности $\mathrm{O}(z_i)$ ровно k_i корней, причем в окрестности $\mathrm{O}(z_i)$ эта функция будет иметь ровно k_i попарно различных корней. Следовательно, многочлен $P(z;a) = P(z) - au_j(z)$ будет иметь в D не менее $k_1 + \cdots + k_m$ корней, причем число попарно различных корней многочлена не меньше $m - 1 + k_i$, т.е. оно больше числа попарно различных корней многочлена $P(z;a)$. Если предположить, что среди корней многочлена $P(z;a)$ есть корни, кратности большей единицы, то аналогичным образом построим многочлен вида (2), число попарно различных корней которого больше числа попарно различных корней многочлена $P(z;a)$. В результате получим многочлен вида (2), имеющий $k_1 + \cdots + k_m > n$ попарно различных корней в области D, что противоречит условию теоремы.

ЛЕММА 4. *Для того чтобы система функций* (1) *была системой Чебышевав в области D, необходимо и достаточно, чтобы детерминант Хаара* (7) *был отличен от нуля в области D.*

Чтобы убедиться в справедливости леммы 4, достаточно рассмотреть систему уравнений

$$c_0 u_0(z_j) + \cdots + c_n u_n(z_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

4. Возьмем систему голоморфных в области D функций $u_0(z) \equiv 1$, $u_1(z)$. Составим и вычислим для этих функций РРД:

$$\begin{vmatrix} u_0(z_0) & u_1(z_0) \\ [u_0(z); z_0, z_1] & [u_1(z); z_0, z_1] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u_1(z_0) \\ 0 & [u_1(z); z_0, z_1] \end{vmatrix}$$
$$= \big[u_1(z); z_0, z_1\big] = \frac{u_1(z_0) - u_1(z_1)}{z_0 - z_1}. \tag{17}$$

Если разделенная разность, расположенная в правой части (17), отлична от нуля при различных $z_0, z_1 \in D$, то функция $u_1(z)$ однолистна в области D и тогда ее производная $u_1'(z)$ также отлична от нуля в области D (см.[6]). Это означает, что $[u_1(z); z_0, z_1] \neq 0$ при любых $z_0, z_1 \in D$. Таким образом, если РРД (17) отличен от нуля при различных $z_0, z_1 \in D$, то он отличен от нуля при любых $z_0, z_1 \in D$. Обобщением полученного результата является следующая теорема.

Лемма 5. *Если РРД* (3) *отличен от нуля при любых попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in D$, то он отличен от нуля при любых $z_0, \ldots, z_n \in D$. Кроме того, функции* (1) *образуют систему Чебышева в области D.*

Доказательство. Так как РРД (3) и детерминант Вандермонда (5) отличны от нуля при любых попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in D$, то по лемме 1 из формулы (8) следует, что детерминант Хаара (7) также отличен от нуля. Но тогда по лемме 4 функции (1) образуют систему Чебышева в области D. Пусть теперь среди точек $z_0, \ldots, z_n \in D$ есть совпадающие между собой точки. Эти точки переобозначим и запишем в виде (9). Предположим, вопреки утверждению теоремы, что для точек (9) РРД (3) обращается в нуль. Согласно лемме 2, представим РРД (3) в виде дроби (15). Детерминант (16) не равен нулю. Но тогда числитель дроби (15) будет равен нулю при попарно различных $\xi_0, \ldots, \xi_s \in D$. Запишем систему из $n+1$ линейных однородных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} c_k u_k^{(t_i)}(\xi_i) = 0, \quad t_i = 0, \ldots, p_i - 1, \quad i = 0, \ldots, s,$$

относительно $c_0, \ldots, c_n$. Так как детерминант этой системы обращается в нуль, то она имеет нетривиальное решение $c_0^*, \ldots, c_n^*$. Но тогда многочлен $P^*(z) = c_0^* u_0(z) + \cdots + c_n^* u_n(z)$ вида (2) будет иметь корни $\xi_0, \ldots, \xi_s$ с соответствующими кратностями $p_0, \ldots, p_s$, т.е. он будет иметь $n+1$ корней в области D, что по лемме 3 не может быть. Лемма 5 доказана.

Следствие 1. *Если $[F(z); z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ при попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in D$, то $[F(z); z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, \ldots, z_n \in D$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если РРД* (3) *отличен от нуля при любых попарно различных* $z_0, \dots, z_n \in D$, *то отличен от нуля в области* D *детерминант Вронского* (6).

Объединяя необходимую часть полученных результатов, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. 1) *Если РРД* (3) *отличен от нуля при любых попарно различных* $z_0, \dots, z_n \in D$, *то он отличен от нуля при любых* $z_0, \dots, z_n \in D$. *Кроме того, функции* (1) *образуют систему Чебышева в области* D. 2) *Если функции* (1) *образуют систему Чебышева в области* D, *то РРД отличен от нуля при любых* $z_0, \dots, z_n \in D$.

Доказательство. Первая часть теоремы является содержанием леммы 5. Рассмотрим вторую часть. Если функции (1) образуют систему Чебышева в области D, то по лемме 4 детерминант (7) отличен от нуля в области D. Но тогда РРД отличен от нуля при попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$. Далее, по лемме 5 он отличен от нуля при любых $z_0, \dots, z_n \in D$.

СЛЕДСТВИЕ 3. 1) *Если* $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ *при любых попарно различных* $z_0, \dots, z_n \in D$, *то система функций*

$$u_0(z) \equiv 1,\ u_1(z) = z, \dots, u_{n-1}(z) = z^{n-1},\ u_n(z) \equiv F(z)$$

является системой Чебышева в области D. 2) *Если эта система функций является системой Чебышева в области* D, *то* $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ *при любых* $z_0, \dots, z_n \in D$.

Известно, что если функции (1) линейно независимы в области D и образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n+1)}(z) + g_n(z) y^{(n)}(z) + \dots + g_1(z) y^{(1)}(z) + g_0(z) y(z) = 0, \tag{18}$$

где $g_0(z), \dots, g_n(z)$ – голоморфные в области D функции, то детерминант Вронского отличен от нуля в любой точке $z \in D$.

Легко понять, что связь РРД с линейным однородным дифференциальным уравнением обнаруживается следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы фундаментальная система решений* $u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z)$ *дифференциального уравнения* (18) *была системой Чебышева в области* D, *необходимо и достаточно, чтобы РРД (3) был отличен от нуля в области* D.

Литература

1. И.И. Ибрагимов, *Методы интерполяции функций и некоторые их применения*, Наука, Москва (1971).
2. И.С. Березин, Н.П. Жидков, *Методы вычислений*, т. 1, Москва (1959).
3. А.О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва (1967).
4. В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1964).
5. С. Карлин, В. Стадден, *Чебышевские системы и их применения в анализе и статистике*, Наука, Москва (1976).
6. И.А. Александров, *Методы теории аналитических функций*, Томский госуниверситет, Томск (2001).

REZIUMĖ

E. Kirjackis. Apie vieną Vronskio determinanto apibendrinimą

Darbe nagrinėjamos savybės įvesto determinanto, kurio elementai yra įvairių eilių padalyti skirtumai. Nurodytas glaudus ryšys tarp šio determinanto, Čebyšovo sistemų ir diferencialinių lygčių.

SUMMARY

E. Kirjackis. On one generalization of Wronskian

In this article the properties of the specially introduced determinant, elements of which are the divided differences in different orders are studied. The close connection of this determinant with the Chebyshev system and the ordinary differential equation is indicated.

Keywords: determinant, wronskian, divided differences, Chebyshev system.