Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 149–152

Dvimatės tinklinės srities sudarymo algoritmas ir jo programinė realizacija

Vytautas KLEIZA (KTU), Jonas Kleiza (VGTU)
el. paštas: vytautas.kleiza@ktl.mii.lt, kleiza@mail.tele2.lt

Daugelis diferencialinių lygčių kraštinių uždavinių sprendžiami taikant tinklelių metodą. Tačiau dažnai sritis, kurioje sprendžiamas uždavinys yra sudėtingos geometrinės formos, todėl iškyla tinklinės srities sudarymo automatizavimo klausimas. Be to, literatūroje skirtoje skaitinių metodų teorijai paprastai tiriamos įvairios skaičiavimo schemos, o ne tinklinės srities sudarymo būdai [1, 2].

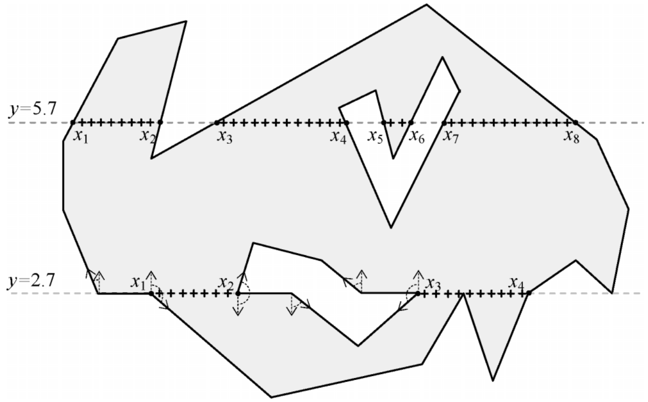
Šiame darbe tirsime tinklo mazgų koordinačių skaičiavimo uždavinį daugiajungėje dvimatėje srityje Ω, kurios išorinis ir vidiniai kontūrai – bet kokie daugiakampiai (pvz., sritis pavaizduota 1 pav.).

Vidinių mazgų aibės sudarymas

Apibrėžus tinklo žingsnius $h_x$irh_y ir apskaičiavus didžiausias ir mažiausias išorinio kontūro taškų koordinates, nesunku rasti skaičius x_0, y_0, i_0, j_0, kad diskrečioji taškų aibė

$$\Omega_{i,j} = \{x_i, y_j\}, \quad \begin{cases} x_i = x_0 + ih_x, & i = 1..i_0, \\ y_j = y_0 + jh_y, & j = 1..j_0, \end{cases}$$

apimtų sudaromą srities Ω tinklinę sritį.



1 pav. Vidinių mazgų sudarymo schema.

Kirsime sritį Ω tiese $y = y_j = \text{const}$, $j = 1..j_0$, ir rasime tokias skaičių poras $x_p^{(j)}, x_{p+1}^{(j)}$, kad visi vidiniai mazgai, kurių koordinatės $y = y_j$, būtų intervalų $(x_p^{(j)}, x_{p+1}^{(j)})$ viduje. Pažymėkime šių intervalų skaičių simboliu n_j. Tada vidinių mazgų aibę sudarys tie aibės $\Omega_{i,j}$ elementai (x_i, y_j), jei bent vienam p $(1 \leqslant p \leqslant n_j)$ galios nelygybė

$$x_{2p-1}^{(j)} < x_i < x_{2p}^{(j)}, \quad j = 1..j_0.$$

Aprašysime verčių $x^{(j)}$ skaičiavimo algoritmą. Pasirodo, kad jis priklauso nuo to, ar tiesė $y = y_j$ kerta kontūro (daugiakampių) viršūnes ar jų nekerta. Galimi 3 viršūnių išsidėstymo variantai.

1. Visos viršūnės nėra tiesėje $y = y_j$.

Šiuo atveju pastaroji kirs kontūro kraštines lyginį skaičių kartų. Todėl skaičius $x_p^{(j)}$ galima rasti išsprendus kontūro kraštinės ir tiesės $y = y_j$ lygčių sistemą:

$$x_p^{(j)} = X_k + (y_j - Y_k)/(Y_{k+1} - Y_k)(X_{k+1} - X_k).$$

Čia (X_k, Y_k) ir (X_{k+1}, Y_{k+1}) – gretimų viršūnių koordinatės. Pastebėsime, kad $Y_{k+1} - Y_k \neq 0$, nes pagal prielaidą tiesės $y = y_j$ nekerta horizontaliųjų kontūro kraštinių.

Surūšiavus apskaičiuotus skaičius $x_p^{(j)}$ didėjimo tvarka

$$x_{q1}^{(j)} < x_{q2}^{(j)} < \ldots < x_{2n_j-1}^{(j)} < x_{2n_j}^{(j)}$$

tiesėje $y = y_j$ gausime intervalus $(x_{q1}^{(j)}, x_{q2}^{(j)}), \ldots, (x_{2n_j-1}^{(j)}, x_{2n_j}^{(j)})$, kurių viduje bus išsidėstę tinklinės srities vidiniai mazgai. Pavyzdžiui, 1 pav. – tai tiesės $y = 5,7$ intervalai $(x_1, x_2), \ldots, (x_7, x_8)$.

2. Tiesei $y = y_j$ priklauso negretimos kontūro viršūnės.

Tegul viena iš jų yra kontūro viršūnė $T_k(X_k, Y_k)$, t. y. $Y_k = y_j$.

Jei 2 gretimos kontūro kraštinės T_kT_{k-1}irT_kT_{k+1} išsidėsčiusios vienoje tiesės $y = y_j$ pusėje (žemiau arba aukščiau jos), tai viršūnė $T_k(X_k, Y_k)$ sudarys nulinio ilgio intervalą $(x_p^{(j)}, x_{p+1}^{(j)})$, nes $x_p^{(j)} = x_{p+1}^{(j)} = X_k$. Todėl viduje tokio intervalo vidinių mazgų nebus ir jo galima neįtraukti į nagrinėjamų intervalų aibę.

Priešingai, kai kraštinės T_kT_{k-1}irT_kT_{k+1} išdėstytos skirtingose tiesės $y = y_j$ pusėse, tai viršūnė $T_k(X_k, Y_k)$ bus vidinių mazgų intervalo kraštinis taškas.

Taigi, šiuo atveju viršūnę $T_k(X_k, Y_k)$ apibūdina sandaugos $(Y_k - Y_{k-1})(Y_k - Y_{k+1})$ ženklas.

3. Tiesei $y = y_j$ priklauso 2 gretimos kontūro viršūnės.

Tegul $T_k$irT_{k+1} yra būtent tokios viršūnės, t. y. visa kontūro kraštinė priklauso tiesei $y = y_j$. Išsiaiškinsime, kokiu požymiu remiantis galima nusakyti ar viršūnė $T_k(T_{k+1})$ yra vidinių mazgų intervalo kraštinis taškas. Pasirodo, kad abi viršūnės nagrinėjamos vienodai.

Tegul $\vec{\mathbf{n}}_k$ – kraštinės T_kT_{k+1} normalė, nukreipta į srities vidų. Tuomet nesunku suprasti, kad tada tik tada, kai kampas tarp vektorių $\vec{\mathbf{n}}_k$ ir T_kT_{k-1} bukas, tai T_k yra vidinių mazgų intervalo pradžios ar pabaigos taškas. Tai iliustruoja 1 pav. tiesės $y = 2,7$ taškai x_1, x_2 ir x_3.

Šį požymį išreikšime analiziškai. Sutarkime, kad srities kontūras apeinamas teigiama kryptimi: išorinis ir vidiniai kontūrai apeinami taip, kad sritis Ω liktų kairėje pusėje. Tada kraštinės T_kT_{k+1} normalės vektorius $\vec{\mathbf{n}}_k = \{0, X_{k+1} - X_k\}$ bus nukreiptas į srities vidų ir viršūnė $T_k(X_k, Y_k)$ bus tada ir tik tada vidinių mazgų intervalo kraštinis taškas, jeigu

$$(Y_{k-1} - Y_k)(X_{k+1} - X_k) < 0,$$

o viršūnė $T_{k+1}(X_{k+1}, Y_{k+1})$, tada ir tik tada, jeigu

$$(Y_{k+2} - Y_{k+1})(X_{k+1} - X_k) < 0.$$

Kiekvienoje tiesėje $y = y_j$ sudarę (priklausomai nuo 3 nagrinėtų variantų) visus intervalus $(x_{2p-1}^{(j)}, x_{2p}^{(j)})$, išskirsime vidinius mazgus (x_i, y_j):

$$(x_i, y_j) \in \Omega_{i,j}, \quad x_{2p-1}^{(j)} < x_i < x_{2p}^{(j)}, \quad j = 1..j_0.$$

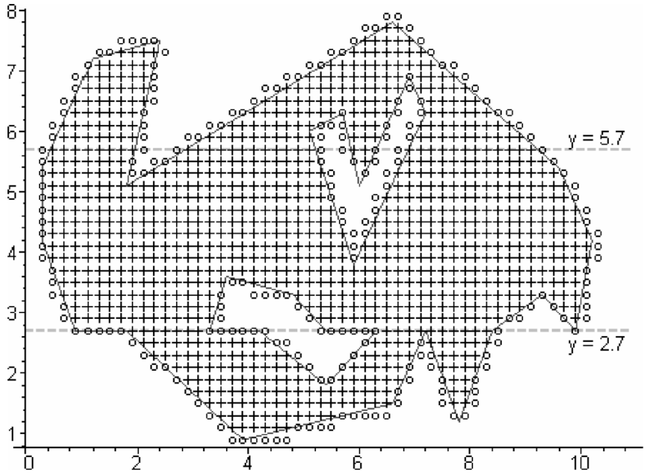
Apjungę visų tiesių $y = y_j$, $j = 1..j_0$, vidinius mazgus gausime srities Ω vidinių mazgų aibę.

Kraštinių mazgų aibės sudarymas

Kraštiniai srities Ω mazgai sudaromi pagal pasirinktą skaičiavimo schemos šabloną (dažniausiai naudojami 5 ar 9 mazgų).

Kai šablonas sudarytas iš 5 mazgų, kiekvienam vidiniam mazgui (x_i, y_j) sudaromi 4 gretimi jam mazgai $(x_i \pm h_x, y_j)$, $(x_i, y_j \pm h_y)$ ir 8 mazgai $(x_i \pm h_x, y_j)$, $(x_i, y_j \pm h_y)$, $(x_i \pm h_x, y_j \pm h_y)$, kai šablonas 9 mazgų.

Kraštinių mazgų aibę gauname atėmę iš visų gretimų vidiniams mazgams aibės vidinių mazgų aibę.



2 pav. Vidiniai ir kraštiniai mazgai (apskaičiuoti kompiuteriu).

Programinė realizacija

Tinklinės srities mazgų koordinačių apskaičiavimui sudarytas programinis modulis, kuris parašytas matematinio paketo Maple kalba. 2 pav. grafiškai pavaizduota jo realizacija: simboliu $+$ pažymėti vidiniai, o simboliu $\circ$ kraštiniai mazgai, kai tinklinės srities žingsniai $h_x = h_y = 0,2$. Vidinių mazgų skaičius 958, kraštinių – 217, skaičiavimo laikas 1 sek.

Literatūra

1. А.А. Самарский, А.Б. Гулин, *Численные методы*, Москва (1989).
2. К. Флетчер, *Вычислительные методы в динамике жидкостей*, т. 2, Москва (1991).

SUMMARY

V. Kleiza, J. Kleiza. The algorithm for creation of 2d network

The research presents the program module for calculation of net area of 2d multiple connected region is created. The program is written in language of the mathematical package Maple.

Keywords: network, nodes, mathematical package Maple.