Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 261–265

VGTU pirmakursių mokyklinės matematikos žinių bei įgūdžių tikrinimas

Aleksandras KRYLOVAS, Juozas RAULYNAITIS (VGTU)
el. paštas: {akr,jrau}@fm.vtu.lt

1. Keli metai rugsėjo pirmosiomis dienomis VGTU matematikai įvairiais būdais tikrina priimtųjų studijuoti matematikos žinias [2 – 5, 8]. 2004 – 2005 mokslo metais tikrinti žinias įgalino dar ir išlyginamųjų kursų organizavimas tiems VGTU pirmakursiams, kurie nebuvo laikę matematikos valstybinio egzamino: numatyta tikrinti žinias ir kursų pradžioje, ir jų pabaigoje. Šio tyrimo tikslas ne tiek bendro žinių lygio vertinimas, kiek bandymas ištirti atskirų žinių bei įgūdžių lygį. Šio straipsnio autoriai parengė ir pateikė studentams uždaro tipo testą iš 10 klausimų arba uždavinių. Klausimai arba uždaviniai buvo parinkti iš valstybinių egzaminų, kurie ir ten, ir pas mus buvo su nurodytais galimais atsakymais bei vertinami vienu tašku. Testo klausimų bei užduočių lygiagrečiųjų variantų sudarymui mes taikome savo metodiką [6, 7]. Kiekvienas studentas gavo individualų testo variantą ir galėjo spręsti 30 minučių. Žemiau pateikiamas vieno testo varianto pavyzdys.

MOKYKLINĖS MATEMATIKOS TESTAS **PAVYZDYS**

1	Funkcijos $\dfrac{\sqrt{r-8}}{15-r}$ apibrėžimo sritis yra	① $[8,15)\cup(15,+\infty)$; ③ $(15,+\infty)$; ⑤ $(8,15]$; ⑦ $(8,15)$; ⑨ $(-\infty,8)$;	② $(8,+\infty)$; ④ $[8,15)$; ⑥ $[15,+\infty)$; ⑧ $(-\infty,15)\cup(15,+\infty)$; ⑩ $[8,15]$.
2	Išspręskite nelygybę $\dfrac{1}{g-13}>\dfrac{1}{g}$.	① $(0,13]$; ③ $(13,+\infty)$; ⑤ $(-\infty,13)$; ⑦ $(0,13)\cup(13,+\infty)$; ⑨ $[0,13)$;	② $(-\infty,0)\cup(13,+\infty)$; ④ $[13,+\infty)$; ⑥ $[0,13]$; ⑧ $(0,+\infty)$; ⑩ $(0,13)$.
3	Lygties $\sqrt{x-6}-x=14$ realiųjų sprendinių aibė yra	① $(-\infty,+\infty)$; ③ $(6,14)$; ⑤ $(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$; ⑦ $\{6,14\}$; ⑨ $\{6,13\}$;	② $\emptyset$; ④ $\{6\}$; ⑥ $\{13,14\}$; ⑧ $\{14\}$; ⑩ $(6,+\infty)$.
4	Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} q+4r=9 \\ q-r=18. \end{cases}$	① $q=27,\ r=-3$; ③ $q=\frac{82}{5},\ r=-\frac{9}{5}$; ⑤ $q=\frac{82}{5},\ r=-\frac{8}{5}$;	② $q=\frac{81}{5},\ r=-\frac{9}{5}$; ④ $q=\frac{82}{3},\ r=-\frac{8}{3}$; ⑥ $q=\frac{80}{3},\ r=-\frac{8}{3}$.

5	Su kuria parametro g reikšme parabolė $y = gx^2 + x + 8$ ir tiesė $y = 4$ neturi susikirtimo taškų?	① $g \leqslant \frac{1}{16}$; ② $g \leqslant \frac{1}{48}$; ③ $g > \frac{1}{48}$; ④ $g < \frac{1}{48}$; ⑤ $g \geqslant \frac{1}{48}$; ⑥ $g < \frac{1}{16}$; ⑦ $g > \frac{1}{16}$; ⑧ $g \geqslant \frac{1}{16}$.
6	Funkcijos $f(q) = \dfrac{5q+4}{12q+13}$ išvestinės reikšmė, kai $q = -6$, $f'(-6) =$	① $\frac{18}{3481}$; ② $\frac{113}{3481}$; ③ $\frac{7}{1121}$; ④ $\frac{20}{3127}$; ⑤ $\frac{19}{3245}$; ⑥ $\frac{17}{3481}$.
7	Kiek triženklių lyginių natūraliųjų skaičių galima užrašyti skaitmenimis 1, 3, 4, 7, 9?	① dvidešimt; ② penkis; ③ trisdešimt penkis; ④ penkiolika; ⑤ dešimt; ⑥ dvidešimt penkis; ⑦ trisdešimt; ⑧ tris.
8	Apskaičiuokite: $\cos 63^0 \cos 3^0 + \sin 63^0 \sin 3^0 =$ ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ④ 0; ⑤ $\frac{1}{2}$; ⑥ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ⑦ $-\frac{1}{2}$.	
9	$\dfrac{q-9}{q+9} - \dfrac{9+q}{q-9} =$	① $\frac{36q}{81-q^2}$; ② $\frac{81+q^2}{81-q^2}$; ③ $\frac{81-q^2}{81+q^2}$; ④ $\frac{81q}{81+q^2}$; ⑤ $\frac{81}{81+q^2}$; ⑥ $\frac{81q}{81-q^2}$; ⑦ $\frac{36q}{81+q^2}$; ⑧ $\frac{81}{81-q^2}$;
10	Vektorius $\vec{a} = \{-1; 6; v\}$ statmenas vektoriui $\vec{b} = \{5; 0; 1\}$. Tuomet vektoriaus $\vec{a}$ ilgis lygus:	① $\sqrt{69}$; ② $\sqrt{65}$; ③ $\sqrt{61}$; ④ $2\sqrt{15}$; ⑤ $\sqrt{73}$; ⑥ $\sqrt{59}$; ⑦ $\sqrt{62}$; ⑧ $3\sqrt{7}$;

2. Kadangi buvo tikrinami tik studentų nurodyti atsakymai, jie galėjo uždavinius spręsti ir mintinai, ir tiesiog atspėti atsakymą. 1 užduotyje nesprendžiant nelygybės reikia nustatyti funkcijos apibrėžimo sritį, užrašytą kaip intervalų sąjunga. Čia reikia skirti intervalų rūšis: uždarus, atvirus, pusiau uždarus. 2 užduotyje reikia išspręsti racionaliąją nelygybę ir užrašyti sprendinių aibę intervalu arba intervalų sąjunga. Taigi atsakymai sudaryti taip, kad antrasis uždavinys iš dalies tikrina tas pačias žinias apie intervalus. 3 užduotyje reikia išspręsti iracionaliąją lygtį su kvadratine šaknimi, žinant, kad abi jos puses keliant kvadratu gali atsirasti pašalinių sprendinių. Pastebėkime, kad atsakymai su intervalais čia parinkti tik tam, kad sumažinti atspėjimo tikimybę. 4 užduotyje reikia išspręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, kai nežinomųjų reikšmės yra racionaliosios. Atsakymą nustatyti čia galima tiesioginiu patikrinimu. Todėl šis klausimas yra labai lengvas ir tikrina elementarias žinias apie lygčių sistemą. Panašiai galima atlikti kitų testo užduočių analizę. Pastebėkime, kad kai kurie iš jų tikrina visą kompleksą žinių ir igūdžių. 5 užduotyje reikia nustatyti, kada kvadratinė lygtis neturi realiųjų šaknų. 6 užduotyje reikia apskaičiuoti dalmens išvestinės reikšmę nurodytame taške. 7 užduotyje reikia pritaikyti kombinacijų daugybos taisyklę. 8 užduotyje tikrinama kampų skirtumo kosinuso formulės žinojimas. 9 užduotyje reikia supaprastinti racionalųjį reiškinį. 10 užduotyje reikia apskaičiuoti vektorių skaliarinę sandaugą ir vektoriaus ilgį.

Tikrinome atskirų uždavinių sprendimo rezultatus, kurie buvo gauti dviem būdais: Elektronikos fakulteto vieno srauto 80 pirmakursių sprendė arba spėjo atsakymą ir už

1 lentelė. Teisingų atsakymų ir nebandžiusių atsakyti skaičiai procentais

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EF	59	39	40	85	22	39	45	51	52	21
FMF	66	44	42	95	20	25	69	46	58	12
	(3)	(8)	(24)	(0)	(71)	(64)	(14)	(53)	(19)	(86)

spėjimą nebuvo baudžiami, antru atveju testą sprendė Fundamentinių mokslų fakulteto naujos technomatematikos specialybės I kurso studentai, kuriems buvo patarta nespėlioti atsakymo, nes už neatspėjimą buvo baudžiami, t.y. įvertinimas rašomas ne 0, bet – 1 (už teisingą atsakymą rašomas 1). 1 lentelėje pateikiamas teisingų atsakymų į atskirus klausimus skaičius procentais.

Kaip matyti iš šios lentelės, geriausiai sprendė 4 užduotį, t.y. dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, blogiausiai sprendė 10 užduotį, kurioje reikėjo apskaičiuoti vektorių skaliarinę sandaugą ir vektoriaus ilgį, ir 5 užduotį, kurioje reikėjo nustatyti, kada parabolė ir horizontalioji tiesė neturi susikirtimo taškų. 5 užduotį išsprendė tik kas ketvirtas priimtas studijuoti. Įdomu, kad tik kas ketvirtas, įstojęs į VGTU matematiką, moka apskaičiuoti racionaliosios funkcijos išvestinės reikšmę taške.

3. Naudojant Elektronikos fakultete gautus teisingų atsakymų į atskirus testo klausimus rezultatus apskaičiuoti koreliacijos koeficientai pagal formulę $r_{ij} = \frac{\overline{x_i x_j} - \overline{x}_i \cdot \overline{x}_j}{s_i \cdot s_j}$; čia $\overline{x}_i$ – atsitiktinio dydžio X_i, reiškiančio i-osios testo užduoties išsprendimą, imties vidurkis. Pvz., kadangi žinoma, kad pirmąją užduotį išsprendė 47 studentai iš 80, tai $\overline{x}_1 = \frac{47}{80} = 0,5875$. Antrąją užduotį išsprendė 31 studentai iš 80. Tuomet $\overline{x}_2 = \frac{31}{80} = 0,3875$. X_i reikšmės yra 0, kai i-osios užduoties neišsprendė, ir 1, kai i-ąją užduotį išsprendė. Galima sakyti, kad X_i yra kokybiškai matuojamas požymis, kurio reikšmės yra TAIP ir NE. Pvz., X_1 yra 1-osios užduoties išsprendimas, X_2 yra 2-osios užduoties išsprendimas, n – sprendusių testą studentų skaičius ($n = 80$). Testo rezultatai pateikti 2 lentelėje.

Tuomet koreliacijos (asociacijos) koeficientas [1]:

$$r_{12} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} = \frac{21 \cdot 23 - 10 \cdot 26}{\sqrt{31 \cdot 49 \cdot 47 \cdot 33}} \approx 0,145.$$

2 lentelė. Testo 1-osios ir 2-osios užduočių išsprendimas

2-ąją užd. išsprendė	1-ąją užd. išsprendė		
	TAIP	NE	Iš viso
TAIP	$a = 21$	$b = 10$	$a + b = 31$
NE	$c = 26$	$d = 23$	$c + d = 49$
Iš viso	$a + c = 47$	$b + d = 33$	$n = a + b + c + d = 80$

3 lentelė. Koreliacijos koeficientai

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0, 15	0, 11	0, 29	0, 03	0, 09	0, 20	0, 15	0, 12	0, 12
2		0, 14	0, 05	0, 12	0, 26	0, 16	0, 11	0, 14	0, 15
3			0, 06	0, 05	0, 08	0, 13	0, 03	0, 11	0, 20
4				−0, 19	0, 19	0, 03	0, 29	0, 30	0, 21
5					0, 06	0, 24	−0, 01	0, 03	0, 01
6						−0, 10	0, 21	0, 24	0, 08
7							0, 13	0, 11	0, 26
8								0, 12	0, 01
9									0, 37

Koreliacijos koeficientai, apskaičiuoti abiem būdais, sutampa. Jų matrica yra simetrinė. Pusė jos pateikta 3 lentelėje.

Jei tikimybė (pasikliovimo lygmuo) yra $\gamma = 0,95$, tai kritinė reikšmė (pasikliautinojo intervalo dešinysis galas) yra $\frac{u_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}960}{\sqrt{80}} \approx 0,22$. Kai apskaičiuotų koreliacijos koeficientų absoliutusis didumas yra mažesnis už $0,22$, su tikimybe $0,95$ galima sakyti, kad testo klausimai yra nepriklausomi, arba kitaip, koreliacijos koeficientai, patenkantys į intervalą $(-0,22; 0,22)$ yra statistiškai nereikšmingi – vienas atsitiktinis dydis neturi įtakos kitam, testo vieno klausimo išsprendimas neturi įtakos kito išsprendimui.

4. Apskaičiuoti sąlyginių tikimybių, kad atsakius į vieną testo klausimą bus atsakyta į kitą, įverčiai (žr. 4 lentelę).

Pvz., tikimybės, kad bus atsakyta į antrąjį testo klausimą, jei yra atsakyta į pirmąjį klausimą, įvertis apskaičiuojamas taip (žr. 2 lentelę): $P^*(2|1) = \frac{n_{12}}{n_1} = \frac{a}{a+c} = \frac{21}{47} \approx 0,45$. Analogiškai $P^*(1|2) = \frac{n_{12}}{n_2} = \frac{a}{a+b} = \frac{21}{31} \approx 0,68$. Didelės tikimybės atspindi papildomą testo klausimų sunkumo laipsnį, nors klausimų sunkumas matomas ir iš 1 lentelės. Kadangi $P^*(2|1) \approx 0,68 > P^*(1|2) \approx 0,45$, darome išvadą, kad antrasis

4 lentelė. Sąlyginių tikimybių įverčiai

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0, 68	0, 66	0, 65	0, 61	0, 65	0, 69	0, 66	0, 64	0, 71
2	0, 45		0, 47	0, 40	0, 50	0, 55	0, 47	0, 44	0, 45	0, 53
3	0, 45	0, 48		0, 41	0, 44	0, 45	0, 47	0, 42	0, 45	0, 59
4	0, 94	0, 87	0, 88		0, 72	0, 94	0, 86	0, 95	0, 95	1, 0
5	0, 23	0, 29	0, 25	0, 19		0, 26	0, 33	0, 22	0, 24	0, 24
6	0, 43	0, 55	0, 44	0, 43	0, 44		0, 33	0, 49	0, 50	0, 47
7	0, 53	0, 55	0, 53	0, 46	0, 67	0, 39		0, 51	0, 50	0, 71
8	0, 57	0, 58	0, 53	0, 57	0, 50	0, 65	0, 58		0, 57	0, 53
9	0, 57	0, 61	0, 59	0, 59	0, 56	0, 68	0, 58	0, 59		0, 88
10	0, 26	0, 29	0, 31	0, 25	0, 22	0, 26	0, 33	0, 22	0, 36	

testo klausimas yra sunkesnis už pirmąjį. Mes jau minėjome, kad jis tikrina ir tas pačias žinias apie intervalus, ir dar racionaliųjų nelygybių sprendimo įgūdžius.

5. Suformuluokime pagrindinius šio darbo rezultatus bei tolesnių tyrimų kryptis:

- Testo klausimų sunkumas stabilus, nes tiek vieno fakulteto, tiek kito fakulteto studentams sunkiausi ir lengviausi yra tie patys klausimai.
- Atsakymai į atskirus testo klausimus gali suteikti informaciją apie testuojamųjų atskiras žinias ir įgūdžių suformuotą lygį.
- Koreliacijos tarp atskirų testo klausimų bei sąlyginės atsakymų į testo klausimus tikimybės leidžia patikslinti informaciją apie atskiras žinias ir įgūdžius.
- Informacija apie klausimų sunkumą, atskiras žinias ir įgūdžius yra naudinga sudarant testus, gerai atitinkančius apibrėžtus tikrinimo tikslus.

Literatūra

1. S. Čirba, R. Jasilionis, V. Liutikas, *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*, VISI, Vilnius (1986).
2. A. Krylovas, Studentų mokyklinės matematikos žinių vertinimas, in: *LMD konf. darbai*, Vilnius (1997), pp. 146–149.
3. A. Krylovas, R. Vilkelis, Pirmo kurso studentų mokyklinės matematikos žinios, in: *Lietuvos mokslas ir pramonė, Matematika ir matematikos dėstymas – 2001*, *Konferencijos pranešimų medžiaga*, Kaunas (2001), pp. 30–34.
4. J. Raulynaitis, A. Krylovas, Matematikos pažymių koreliacinė analizė ir sesijos rezultatų prognozė, *Liet. matem. rink.*, **42** (spec.nr.), 438–443 (2002).
5. A. Krylovas, J. Raulynaitis, J. Jaurienė, Apie matematikos žinių įvairių vertinimų suderinamumą, *Liet. matem. rink.*, **42** (spec. nr.), 397–401 (2002).
6. A. Krylovas, J. Raulynaitis, Apie vieną tikimybių teorijos uždavinį, in: *Matematika ir matematikos dėstymas – 2003*, *Konferencijos pranešimų medžiaga*, Kauno technologijos universitetas (2003), pp. 16–20.
7. A. Krylovas, J. Raulynaitis, Vieno tikimybių teorijos uždavinio išlygiagretinimo patirtis, *Liet. matem. rink.*, **43** (spec. nr.), 357–360 (2003).
8. A. Krylovas, J. Raulynaitis, Studentų matematikos žinių kompleksinis vertinimas semestro metu, *Liet. matem. rink.*, **44** (spec. nr.), 477–481 (2004).

SUMMARY

A. Krylovas, J. Raulynaitis. Testing of mathematical knowledges and skills of the first course students of Vilnius Gediminas technical university

The research of the methods for testing of mathematical knowledges and skills of the universitety students is presented. The article continues previous works of the authors.

Keywords: mathematical education, statisics education research, students achivement, testing, measurement.