Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 270–274

Применение метода монотонных последовательностей

Юозас Ювенциюс МАЧИС (MII)
e-mail: jmacys@ktl.mii.lt

Резюме. Рассматриваются вопросы применения и точности метода монотонных последовательностей (см. [1], [2]). Показано, как этот метод применяется к оцениванию конечных сумм при большом количестве слагаемых.

Ключевые слова: метод монотонных последовательностей, приближенное суммирование, точность оценок.

Метод монотонных последовательностей изложен в [1] и [2]. В статье [3] рассматривается, как этот метод применяется для очень точного оценивания факториальных частных $1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}\ldots{\cdot}(2n-1)/(2{\cdot}4{\cdot}6{\cdot}\ldots{\cdot}2n)$ и для уточнения неравенства Уоллиса, имеющего непосредственное отношение к этим частным:

$$\frac{2^2{\cdot}4^2{\cdot}6^2{\cdot}\ldots{\cdot}(2n)^2}{1^2{\cdot}3^2{\cdot}5^2{\cdot}\ldots{\cdot}(2n-1)^2}{\cdot}\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \pi < \frac{2^2{\cdot}4^2{\cdot}6^2{\cdot}\ldots{\cdot}(2n)^2}{1^2{\cdot}3^2{\cdot}5^2{\cdot}\ldots{\cdot}(2n-1)^2}{\cdot}\frac{1}{n}.$$

Как только что упомянутые уточнения, так и уточнения остаточного члена в [1] и [2] ряда

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

позволяют с необходимой точностью вычислить число π. В связи с этим под иным углом следует рассматривать скептические замечания о пригодности приведенных формул для приближенного вычисления π (см., например, [4, с. 147, 381]) и [5, с. 253].

В этой статье мы попытаемся объяснить, за счет чего методом монотонных последовательностей достигается высокая точность оценок.

Обратимся к задаче, предложенной автором настоящей статьи проблемному комитету Всемирной олимпиады школьников по математике 2005 года в Мексике для рассмотрения в качестве конкурсной.

Докажите, что

$$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2005} < \frac{1}{6}.$$

Первое решение. Пусть

$$S_n = \frac{3}{4\cdot 7} + \frac{3}{10\cdot 13} + \dots + \frac{3}{(6n-2)(6n+1)},$$

тогда $x = S_{334}$. Последовательность S_n возрастает, поскольку ее члены положительны. Подберем оптимальную постоянную t такую, чтобы последовательность $S_n + \frac{t}{n}$ уже убывала:

$$S_n + \frac{t}{n} > S_{n+1} + \frac{t}{n+1}, \qquad \frac{t}{n(n+1)} > \frac{3}{(6n+4)(6n+7)}.$$

Видим, что для бóльших n должно быть $t \geqslant \frac{1}{12}$. С другой стороны, $t = \frac{1}{12}$ удовлетворяет неравенству при всех n:

$$\frac{1}{12n(n+1)} > \frac{3}{(6n+4)(6n+7)} \iff 36n^2 + 66n + 28 > 36n^2 + 36n.$$

Итак, последовательность $S_n + \frac{1}{12n}$ убывает.

Теперь подберем оптимальную постоянную k такую, чтобы последовательность $S_n + \frac{1}{12(n+k)}$ все еще убывала:

$$S_n + \frac{1}{12(n+k)} > S_{n+1} + \frac{1}{12(n+1+k)}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{12(n+k)(n+k+1)} > \frac{3}{(6n+4)(6n+7)},$$

$$72nk + 36k^2 + 36k < 30n + 28. \tag{2}$$

Ясно, что при больших n должно быть $k \leqslant \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$. С другой стороны, значение $k = \frac{5}{12}$ удовлетворяет неравенству (2), поскольку

$$36k(k+1) = 36\cdot\frac{5}{12}\left(\frac{5}{12} + 1\right) = 15\cdot\frac{17}{12} = \frac{85}{4} < 28.$$

Таким образом, значение $k = \frac{5}{12}$ является наибольшим возможным. Итак, последовательность $S_n + \frac{1}{12n+5}$ убывает, и

$$S_1 + \frac{1}{17} > S_2 + \frac{1}{29} > \ldots > S_{334} + \frac{1}{12\cdot 334 + 5}.$$

Следовательно,

$$S_{334} < S_1 + \frac{1}{17} - \frac{1}{12\cdot 334 + 5} < S_1 + \frac{1}{17}$$

$$= \frac{3}{28} + \frac{1}{17} = \frac{3}{27} - \frac{3}{27 \cdot 28} + \frac{1}{18} + \frac{1}{17 \cdot 18} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{34} - \frac{1}{28}\right) < \frac{1}{6}.$$

Второе решение. Разумеется, если не разъяснять идею решения, то его можно записать совсем коротко. Поскольку

$$\frac{3}{(6n-2)(6n+1)} = \frac{12}{(12n-4)(12n+2)} < \frac{12}{(12n-7)(12n+5)}$$
$$= \frac{1}{12n-7} - \frac{1}{12n+5},$$

то

$$x < \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{12 \cdot 334 - 7} - \frac{1}{12 \cdot 334 + 5}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} - \frac{1}{12 \cdot 334 + 5} < \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} < \frac{1}{6}.$$

Последнее неравенство верно, поскольку

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} = \frac{1}{12} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} = \frac{1}{17} - \frac{5}{84} < 0.$$

Видим, что во втором решении в действие вступает „телескопическое“ сокращение слагаемых – именно для этого произведение $(12n-4)(12n+2)$ заменяется на несколько меньшее $(12n-7)(12n+5)$: здесь множители различаются на 12, что и является необходимым для взаимного сокращения слагаемых (ср. [6], однако там совершенно не обсуждаются вопросы точности).

Нетрудно убедиться, что неравенства, использованные в первом и втором решении, равносильны. Однако первое решение имеет то преимущество, что сразу ясно, как все оценки можно уточнять и даже сделать их двухсторонними.

Например, если брать $k = \frac{1}{2}$, то неравенство (2) изменит свой знак:

$$36n + 9 + 18 > 30n + 28 \iff 6n > 1.$$

Это означает, что неравенство (1) превращается в

$$S_n + \frac{1}{12(n+\frac{1}{2})} < S_{n+1} + \frac{1}{12(n+1+\frac{1}{2})},$$

следовательно, последовательность $S_n + \frac{1}{12n+6}$ уже возрастает, так что

$$S_1 + \frac{1}{18} < S_2 + \frac{1}{30} < \ldots < S_{334} + \frac{1}{12 \cdot 334 + 6}.$$

Поэтому

$$S_{334} > S_1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{12 \cdot 334 + 6} = \frac{3}{28} + \frac{1}{18} - \frac{1}{12 \cdot 334 + 6} > 0{,}162.$$

Выше мы видели, что

$$S_{334} < \frac{3}{28} + \frac{1}{17} - \frac{1}{12\cdot 334 + 5} < 0{,}166\,,$$

и точность оценки $0{,}162 < S_{334} < 0{,}166$ нас вполне устраивает.

Впрочем, если S_{334} оценивать не первыми членами последовательностей, а вторыми, то

$$S_2 + \frac{1}{30} - \frac{1}{12\cdot 334 + 6} < S_{334} < S_2 + \frac{1}{29} - \frac{1}{12\cdot 334 + 5},$$

и ясно, что разность между оценкой сверху и оценкой снизу будет приблизительно равной $\frac{1}{29} - \frac{1}{30} = \frac{1}{870} < 0{,}068$. Далее, оценка третьими членами даст точность приблизительно $\frac{1}{41} - \frac{1}{42} < 0{,}0006$:

$$S_3 + \frac{1}{42} - \frac{1}{12\cdot 334 + 6} < S_{334} < S_3 + \frac{1}{41} - \frac{1}{12\cdot 334 + 5},$$

$$\frac{3}{28} + \frac{3}{130} + \frac{3}{16\cdot 19} + \frac{1}{42} - \frac{1}{12\cdot 334 + 6}$$
$$< S_{334} < \frac{3}{28} + \frac{3}{130} + \frac{3}{16\cdot 19} + \frac{1}{41} - \frac{1}{12\cdot 334 + 5},$$
$$0{,}16364 < S_{334} < 0{,}16423.$$

Итак, видим, что можно добится любой необходимой точности.

Уточнение порядка оценок и подбор оптимальных постоянных можно продолжать. По подобию (1), можно записать условие возрастания последовательности

$$S_n + \frac{1}{12(n+k)} < S_{n+1} + \frac{1}{12(n+1+k)},$$

а k выбирать в виде $k = \frac{5}{12} + \frac{l}{n}$:

$$\frac{1}{12\left(n + \frac{5}{12} + \frac{l}{n}\right)} - \frac{1}{12\left(n + 1 + \frac{5}{12} + \frac{l}{n+1}\right)} < \frac{3}{(6n+4)(6n+7)}.$$

Отсюда опять можно определить оптимальное l, добиться более высокого порядка оценки и т.д.

Литература

1. Ю.Ю. Мачис, Метод монотонных последовательностей, в кн.: *Тезисы VI международной конференции „Преподавание математики: ретроспектива и перспективы“*, Вильнюсский университет (2005), с. 54–56.
2. Ю.Ю. Мачис, Метод монотонных последовательностей, в кн.: *Труды VI международной конференции „Преподавание математики: ретроспектива и перспективы“*, Вильнюсский университет (2005), с. 104–108.

3. Ю.Ю. Мачис, Об оценках факториальных отношений, *Liet. matem. rink.*, **45**(3), 349–358 (2005).
4. Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, *II*, Физматгиз, Москва (1959).
5. V. Klee, S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America (1991).
6. П.П. Коровкин, *Неравенства*, Наука, Москва (1983).

REZIUMĖ

J.J. Mačys. Monotoniškųjų sekų metodo taikymas

Nagrinėjamas monotoniškųjų sekų metodo (žr. [1], [2]) taikymas, aptariami jo tikslumo klausimai. Parodyta, kaip metodas taikomas dideliu tikslumu apskaičiuojant baigtines sumas, kai dėmenų skaičius didelis.

SUMMARY

J.J. Mačys. Application of the methods of monotonic sequences

The method of monotonic sequences (see [1], [2]) is considered and the issue of its exactness is discussed. It is shown how the method can be applied to finite sums with a large number of summands.

Keywords: Wallis' inequalities, method of monotonic sequences, exactness of estimates.