Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 335–338

Atsitiktinių dydžių transformacijos

A. BIKELIS, J. TURKUVIENĖ (VU)
el. paštas: marius@post.omnitel.lt, jurgutet@takas.lt

Atsitiktinių dydžių transformacijos ir jų skirstinių tyrimai užima centrinę vietą matematinėje statistikoje [1–5]. Mes savo darbuose nagrinėjame finansų matematikoje sutinkamus tikimybinius skirstinius [6, 7], t.y. skirstinius, kurie priklauso klasėms $IG(a,b)$, $GIC(\lambda,a,b)$, $TS(\kappa,a,b)$, $VG(C,G,M)$, $NIG(\alpha,\beta,\delta)$, $CGMY(C,G,M,Y)$ ir t.t. Visi nagrinėjami tikimybiniai skirstiniai yra be galo dalūs ir priklauso L klasei. Jų charakteringosios funkcijos yra pavidalo

$$f(t)=\exp\left\{it\gamma-\frac{\sigma^2}{2}t^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{itx}-1-itx\mathbf{1}_{(|x|<1)}\right)\pi(\mathrm{d}x)\right\},$$

kur $\gamma\in R^1$, $\sigma^2\geqslant 0$, matas $\pi(\mathrm{d}x)$ apibrėžtas tiesėje R^1 be 0, t.y. $R^1\setminus\{0\}$, ir

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1\wedge x^2)\pi(\mathrm{d}x)<\infty.$$

Levy-Chinčino tripletas yra $\left(\gamma,0,\pi(\mathrm{d}x)\right)$.

Smulkiau apsistojame ties B. Grigelionio [4] klasės $GZD(\alpha,\beta_1,\beta_2,\delta,\mu)$ tikimybiniais skirstiniais. Yra įrodyta [4], kad $GZD(\ldots)$ skirstinių tripletas yra

$$\left(a,0,\pi(\mathrm{d}x)\right),$$

kur

$$\begin{aligned}
a&=\frac{\alpha\delta}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}}\frac{\mathrm{e}^{-\beta_2x}-\mathrm{e}^{-\beta_1x}}{1-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x+\mu,\\
\pi(\mathrm{d}x)&=v(x)\mathrm{d}x,\\
v(x)&=\begin{cases}\dfrac{2\delta\exp\left\{-\frac{2\pi\beta_2}{\alpha}x\right\}}{x\left(1-\exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha}x\right\}\right)}, & \text{kai } x>0,\\[2ex]
\dfrac{2\delta\exp\left\{\frac{2\pi\beta_1}{\alpha}x\right\}}{|x|\left(1-\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}x\right\}\right)}, & \text{kai } x<0,\end{cases}
\end{aligned}$$

Darbe [4] yra apibrėžtas daugiamatis $GZD(\ldots)$ dėsnio analogas, t.y. jo tankio funkcija

$$p(\vec{x}) = \int_0^\infty g_{v\vec{a}+\vec{\mu}, vA}(\vec{x})\, h(v)\, \mathrm{d}v, \quad \vec{x} \in R^k,$$

kur

$$g_{\vec{a},A}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{|A|}(\sqrt{2\pi})^k} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})A^{-1}(\vec{x}-\vec{a}) \Big\},$$

$\vec{a}, \vec{\mu} \in R^k$, A – teigiamai apibrėžta simetrinė matrica $k \times k$,

$$h(v) = \sum_{k=0}^\infty \nu_k \mathrm{e}^{-\lambda_k v}, \quad v > 0,$$

yra Polya dėsnio tankis su parametrais $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$,

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < \infty, \quad \nu_k = \lambda_k \prod_{j \neq k} \Big(\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_k} \Big),$$

egzistuoja $c > 0$ tokia, kad

$$|\nu_k| = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{c\lambda_k}),$$

kai $k \to \infty$.

Šiuo atveju Levy charakteristikos $(\vec{\gamma}_k, \vec{O}, \vec{\pi}_k)$ yra

$$\vec{\gamma}_k = \vec{\mu} + \int_{|\vec{x}|<1} \vec{x}\pi_k(\mathrm{d}\vec{x}),$$

$$\pi_k(B) = \int_B \frac{2\exp\{(\vec{a}A^{-1}, \vec{x})\}}{\sqrt{|A|}(\sqrt{2\pi})^k} \sum_{l=0}^\infty \Big[\frac{2\lambda_l + (\vec{a}A^{-1}, \vec{a})}{(\vec{x}A^{-1}, x)} \Big]^{k/2}$$
$$\times K_{k/2}\bigg(\Big[\big(2\lambda_k + (\vec{a}A^{-1}, \vec{a})\big)(\vec{x}A^{-1}, \vec{x}) \Big]^{1/2} \bigg) \mathrm{d}\vec{x},$$

kur $B \in \mathcal{B}(R^k \setminus \{0\})$, $K_\gamma(u)$ – modifikuota Besselio funkcija, t.y.

$$K_\gamma(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty v^{\gamma-1} \mathrm{e}^{-u(v+v^{-1})/2} \mathrm{d}v, \quad u > 0, \gamma \in R^1.$$

Tarkime,

$$\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{\mu}) + v[i(\vec{t},\vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{t}A,\vec{t})]} = \int_{R^k} \mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{x})} g_{v\vec{a}+\vec{\mu}, vA}(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x},$$

$$f(\vec{t}) = \int_{R^k} \mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{x})} p(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}.$$

Tuomet

$$f(\vec{t}) = \mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{\mu})}\widehat{h}\Big(\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{t}A,\vec{t})}\Big),$$

kur $\widehat{h}(\mathrm{e}^{it})$ yra Polya charakteringoji funkcija.

Daugiamatis $GZD(\ldots)$ dėsnis apibrėžiamas charakteringosios funkcijos $f^{2\delta}(\vec{t})$ pagalba:

$$f^{2\delta}(\vec{t}) = \mathrm{e}^{i2\delta(\vec{t},\vec{\mu})}\Big(\widehat{h}(\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{t}A,\vec{t})})\Big)^{2\delta} = \mathrm{e}^{i2\delta(\vec{t},\vec{\mu})}\Big(\widehat{h}_{2\delta}(\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{t}A,\vec{t})})\Big).$$

Savo darbuose mes praplečiame $GZD(\ldots)$ skirstinių klasę. Vietoje tikimybinio skirstinio su tankiu $h(v)$, $v > 0$, imame tikimybinį skirstinį

$$H(v), \quad v \geqslant 0.$$

Jis gali būti diskretus ir ne be galo dalus.

Gauso tankį praplečiame iki

$$g_{v\vec{a}+\vec{\mu},\alpha_0^2 A_0+v\alpha_1^2 A_1}(\vec{x}),$$

kur $\alpha_0 \geqslant 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$, A_0 ir A_1 – teigiamai apibrėžtos simetrinės matricos $k \times k$.

Dabar charakteringoji funkcija yra

$$\overline{f}(\vec{t}) = \mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{\mu})-\frac{\alpha_0^2}{2}(\vec{t}A_0,\vec{t}_0)}\widehat{\widehat{h}}\Big(\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{a})-\frac{\alpha_1^2}{2}(\vec{t}A_1,\vec{t})}\Big),$$

kur

$$\widehat{\widehat{h}}(z) = \int_0^\infty z^v \,\mathrm{d}H(v).$$

Šiuo atveju Levy tripletas yra

$$(\vec{\gamma}_0, \alpha_0^2 A_0, \pi_k).$$

Kai $k = 1$, gauname

$$\xi_{ZD} = \mu + \theta\alpha_1\eta_H + \eta_{N(0,1)}\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2\eta_H} \in GZD\Big(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{1}{2}, \mu\Big),$$

kur $P\{\eta_H < x\} = \int_0^x h(v)\mathrm{d}v$.

B. Grigelionio [4] klasės $GZD(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ atsitiktiniams dydžiams ξ_G gauname sekančią transformaciją

$$\xi_G = 2\delta\mu + \theta\alpha_1\eta_{H(\delta)} + \eta_{N(0,1)}\sqrt{2\delta\alpha_0^2 + \alpha_1^2\eta_{H(\delta)}},$$

kur atsitiktinio dydžio $\eta_{H(\delta)}$ chrakteringoji funkcija yra $(\widehat{\widehat{h}}(t))^{2\delta}$, o $\eta_{N(0,1)}$ – standartinis Gauso atsitiktinis dydis.

Literatūra

1. W. Wasow, On the asymptotic transformation of certain distribution into the normal distribution, *Proc. Symp. Appl. Math.*, **6**, 251–259 (1956).
2. E.A. Cornish, R.A. Fisher, Moments and cumulants in the specification of distributions, *Rev. Inst. Intern. Statist.*, **4**, 307–320 (1937).
3. R. Bhattacharya, M. Denker, *Asymptotic Statistics*, Birkäuser Verlag (1990).
4. B. Grigelionis, On Polya mixtures of multivariate Gaussian distributions, *Liet. matem. rink.* (2004).
5. W. Shoutens, *Levy Processes in Finance*, Jhon Wiley & Sons, Ltd. (2003).

SUMMARY

A. Bikelis, J. Turkuvienė. Transformations of random variables

Transformation of random variable $\xi_G \sim GZD(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ is obtained in this article.

Keywords: generalized z-distribution, Levy characteristics, Gausian law, random variable transformation.