Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 417–421

Skysto metalo lašo su nefiksuotu spinduliu paviršiaus skaitinis modeliavimas

Regimantas ČIUPAILA (VGTU)
el. paštas: reciup@lrs.lt

1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėjamas itin mažo tūrio skysto metalo lašo ant horizontalios plokštumos laisvo paviršiaus modeliavimo uždavinys, naudojant parametrizaciją. Įvairūs lašo matematiniai parametriniai modeliai aprašyti ir tirti įvairių autorių, pvz. [1]–[3]. Šiame darbe siūlomas diferencialinis modelis susideda iš dviejų pirmos eilės netiesinių parametrinių lygčių sistemos

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\sin\varphi}{Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda},$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\cos\varphi}{Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda}, \tag{1}$$

su atskirtomis kraštinėmis sąlygomis $u(\varphi_1) = 0$, $r(0) = 0$ ir nelokalia integraline sąlyga, reiškiančia lašo tūrio išlaikymo principą:

$$2\pi \int_0^a ur\,\mathrm{d}r = V_0. \tag{2}$$

Čia ϕ_1 – drėkinimo kampas, V_0 – lašo tūris, a – lašo pagrindo skritulio spindulys, K – žinoma konstanta, λ – nežinoma konstanta (Lagranžo daugiklis). Uždavinio sprendinys – $(u(\phi, a), r(\phi, a), \lambda)$.

Pagrindinis darbo tikslas buvo sukonstruoti efektyvų metodą skaičiuoti lašo keteros kreivę, kai lašo pagrindo ant horizontalios plokštumos skritulio spindulys yra nefiksuotas. Kraštiniam uždaviniui su atskirtomis kraštinėmis sąlygomis spręsti siūloma jį suvesti į Košy pradinio uždavinio sprendimą. Skaičiuojami lašo keteros kreivė bei pasklidimo ant horizontalios plokštumos skritulio spindulys. Ankstesniuose lašo modeliuose, nagrinėtuose, pavyzdžiui, darbuose [2], [3], lašo ir plokštumos sukibimo spindulys būdavo fiksuotas, tą pasiekiant specialaus plokštumos apdorojimo dėka. Uždavinio sprendimas supaprastėdavo, keteros kreivės forma priklausydavo nuo drėkinimo kampo ϕ_1. Nefiksuojant pagrindo spindulio, spindulys a tampa uždavinio parametru, priklausančiu nuo kitų geometrinių ir mechaninių uždavinio parametrų V_0, K, ϕ_1.

Darbuose [1], [3] buvo tirtas trijų lygčių parametrinis lašo modelis

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \sin\varphi,\\
&\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \cos\varphi,\\
&\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda,\\
&u(1) = 0, \quad r(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0,
\end{aligned}$$

su nelokalia sąlyga:

$$2\pi \int_0^1 ur\cos\varphi\,\mathrm{d}s = V_0.$$

Atsižvelgus į sąryšį

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s},$$

sistema suvedama į dviejų netiesinių lygčių sistemą

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\sin\varphi}{Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda},\\
&\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\cos\varphi}{Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda},
\end{aligned} \tag{3}$$

su atskirtomis kraštinėmis sąlygomis

$$u(\varphi_1) = 0, \quad r(0) = 0, \tag{4}$$

ir nelokalia integraline sąlyga

$$2\pi \int_0^a ur\,\mathrm{d}r = V_0. \tag{5}$$

Uždavinys pertvarkomas iš kraštinio uždavinio su atskirtomis kraštinėmis sąlygomis į ekvivalentišką pradinį uždavinį. Nagrinėjama dviejų netiesinių parametrinių lygčių sistema (3) su nelokalia sąlyga (5) ir pradinėmis sąlygomis

$$u(\varphi_1) = 0, \quad r(\varphi_1) = a. \tag{6}$$

Sprendinys tuomet yra $(u(\phi, a), r(\phi, a), \lambda)$.

Kai lašo pagrindo skritulio spindulys a yra nefiksuotas, tai Košy uždavinys (3), (5), (6) priklauso nuo nežinomo parametro $a = r(\phi_1)$, t.y. $u = u(\phi, a)$, $r = r(\phi, a)$. Parametras a turi tenkinti sąlygą $r(0, a) = 0$. Darbe [4] parodyta, kad nežinoma uždavinio konstanta λ gali būti išreikšta per kitus uždavinio parametrus:

$$\frac{\lambda}{2}a^2 + a\cos\varphi_1 - \frac{K}{V_0} = 0.$$

Taip pat įrodyta teigiamos spindulio a reikšmės vienatis

$$a = -\frac{1}{\lambda}\cos\varphi_1 \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}\cos^2\varphi_1 + \frac{K}{\lambda\pi}V_0}$$

tiek smailiems, tiek ir bukiems drėkinimo kampams ($\cos\phi_1 > 0$). Ši sąlyga pritaikyta ir dviejų lygčių sistemai (3), (5), (6).

2. Skaitinis eksperimentas

Sistemai (3), (5), (6) spręsti buvo pasiūlytas dvipakopis iteracinis algoritmas. Išorinė procedūra paremta modifikuotu intervalo dalinimo pusiau metodu. Pasirinktame spindulio a reikšmių intervale $[a_0, a_1]$, pradedant reikšme a_0, nustatomas reikalingasis intervalas $[a^*, a^{**}]$, kurio kairysis ir dešinysis galai atitinkamai lygūs $a^* = a_0 + mh$ ir $a^{**} = a_0 + (m+1)h$. Šiame intervale ir taikomas intervalo dalinimo pusiau metodas.

Intervalo $[a^*, a^{**}]$ galų pasirinkimo kriterijumi tarnauja tūrio išlaikymo sąlyga $V = V_0$ (6):

$$\begin{aligned} &r = a^*, \quad && r = a^{**}, \\ &V < V_0, \quad && V > V_0. \end{aligned}$$

Vidinei procedūrai kiekviename taške taikytas ketvirtos eilės Rungės–Kutos metodas sistemai (3), (5), (6) spręsti.

Skaičiavimų procesui įvertinti buvo tirtos sprendinio savybes. Pažymėkime sistemos (3) dešiniąsias puses:

$$f_1 = \frac{\sin\varphi}{Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda},$$
$$f_2 = \frac{\cos\varphi}{Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda}.$$

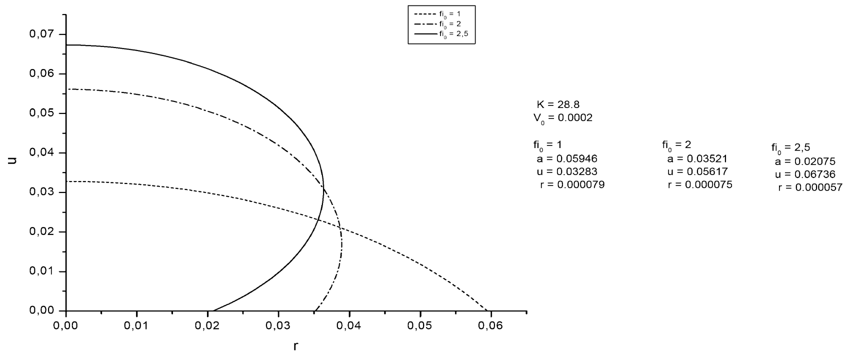
Išvestinės $\left|\frac{\partial f_i}{\partial u}\right|$, $\left|\frac{\partial f_i}{\partial r}\right|$, $i = 1, 2$ yra aprėžtos kiekviename iš intervalų $(\varepsilon, \phi_1]$, kur ε yra kaip norima mažas skaičius. Galima parodyti, kad tada sprendinio funkcijos $u = u(c), r = r(c)$ čia yra tolydžios ir tolydžiai priklauso nuo c.

Funkcijos f_1 ir f_2 tenkina Lipšico sąlygą ir jų išvestinės pagal u ir r yra aprėžtos visur, išskyrus kairįjį intervalo $(\varepsilon, \phi_1]$ galą, kuriame įvertinti aprėžtumą yra sudėtinga. Dėl šios priežasties skaičiavimai buvo atliekami nuo dešiniojo intervalo galo.

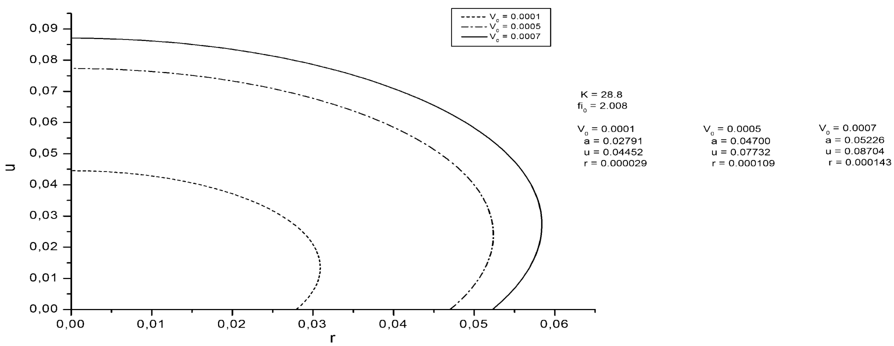
Į funkcijų f_1 ir f_2 bei jų išvestinių

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = -\frac{K\sin\varphi}{(Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda)^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial r} = -\frac{\sin^2\varphi}{(Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda)^2 r^2},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = -\frac{K\cos\varphi}{(Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial r} = -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{(Ku - \frac{1}{r}\sin\varphi - \lambda)^2 r^2}$$

išraišką įeina santykiai $\frac{\sin\varphi}{r}$, $\frac{\sin\varphi}{r^2}$, galintys būti neaprėžti, kai $\phi \to 0$.



1 pav.



2 pav.

Šiems santykiams įvertinti buvo panaudotas skaitinis eksperimentas, kurio rezultatai leidžia tvirtinti, jog šie santykiai nyksta, kai $\phi \to 0$, ir neaprėžtumo neatsiranda.

Algoritmo efektyvumas iliustruojamas skaitiniais rezultatais. Lašo su nefiksuotu spinduliu keteros linijos kitimas apskaičiuotas priklausomai nuo drėkinimo kampo ϕ_1 (1 pav.) ir lašo tūrio V_0 (2 pav.) kitimo.

Literatūra

1. R. Finn, *Equilibrated Capillary Surfaces. Mathematical Theories*, Moscow (1986).
2. R. Čiegis, R. Čiupaila, On the variational-difference method for one problem of conditional minimization, *Liet. matem. rink.*, **30**(4), 810–822 (1990).
3. M. Sapagovas, On the investigation of the convergence of finite difference method for the Neumann boundary problem of the surface of the drop, *Differ. Equations*, **37**(7), 1019–1025 (2001).
4. R. Čiupaila, M. Sapagovas, Solution of the system of parametric equations of the sessile drop, *Math. Modeling and Analysis*, **7**(2), 201–206 (2002).

SUMMARY

R. Čiupaila. Modelling of the surface of the liquid metal drop with nonfixed radius

Two first order nonlinear differential equations system with the separated boundary conditions and nonlocal integral conditions is considered. The system is modeling the surface of the liquid micro volume drop with nonfixed radius on the horizontal plane. The boundary problem is brought to the initial one. The iterative algorithm is proposed to count the curve of the crest of the drop depending on some geometrical and mechanical parameters.

Keywords: system of nonlinear differential equations, nonlocal condition, liquid drop.