Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 422–425

Anizotropinės terpės savitojo laidumo tenzoriaus skaičiavimo metodas

Vytautas KLEIZA (KTU), Jonas KLEIZA (VGTU)
el. paštas: vytautas.kleiza@ktl.mii.lt, kleiza@mail.tele2.lt

1. Uždavinio formulavimas

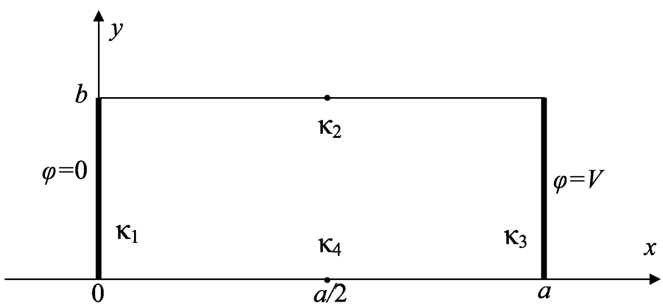
Tarkime, kad anizotropiškai laidžios terpės srities forma yra vienodo storio h stačiakampis gretasienis $D = a \times b \times h$, kurio pagrindo kraštinės bet kaip orientuotos atžvilgiu savitojo elektrinio laidumo tenzoriaus $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ pagrindinių krypčių. Dviejuose priešingose stačiakampio kraštinėse išdėstomi kontaktai κ_1, κ_3, o kiti du kontaktai κ_2, κ_4 taškiniai išdėstomi likusių kraštinių centriniuose taškuose (žr. 1 pav.). Bandymų metu, praleidžiant elektros srovę pro kontaktų poras κ_1 ir κ_2, κ_1 ir κ_3, κ_1 ir κ_4, matuojami atitinkamų srovių stipriai I_{12}, I_{13}, I_{14} ir atsiradę tarp likusių kontaktų potencialų skirtumai$\Delta\varphi_{34}$, $\Delta\varphi_{24}$, $\Delta\varphi_{23}$.

Darbe sprendžiamas uždavinys: žinant šiuos matavimų rezultatus, rasti tenzorių σ.

2. Laidumo tenzoriaus dedamųjų išraiškos

Sudarius įtampą V tarp kontaktų κ_1 ir κ_3 potencialo φ pasiskirstymą stačiakampio D kraštinėje $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ galima išreikšti parametrinėje formoje [1]:

$$\varphi = V \int_0^t f_{0.5,k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau / A_{0.5,k}, \tag{1}$$



1 pav. Kontaktų išdėstymas stačiakampio formos bandinyje.

$$x = a \int_0^t f_{\alpha,k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau / A_{\alpha,k}, \tag{2}$$

čia $t \in [0, 1]$, $f_{\alpha,k}(\tau) = \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}(1-k\tau)^{\alpha-1}$, $A_{\alpha,k} = \int_0^1 f_{\alpha,k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, o pratekančios srovės I_{13} dydį integralų santykiu:

$$I_{13} = V\sqrt{\det\sigma}\frac{A_{0.5,1-k}}{A_{0.5,k}}. \tag{3}$$

Be to, skaičius

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \in (0, 1), \tag{4}$$

o parametras $k \in (0, 1)$ yra vienareikšmiškai išsprendžiamos lygties

$$\frac{A_{\alpha,1-k}}{A_{\alpha,k}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}} \tag{5}$$

sprendinys. Remiantis sąryšiais (3)–(5), randame tenzoriaus dedamąsias:

$$\sigma_{11} = \lambda\frac{a}{b}\frac{A_{\alpha,1-k}}{A_{\alpha,k}}, \quad \sigma_{12} = -\lambda\cos(\alpha\pi), \quad \sigma_{22} = \lambda\frac{b}{a}\frac{A_{\alpha,k}}{A_{\alpha,1-k}}, \tag{6}$$

$$\lambda = \sqrt{\det\sigma}/\sin(\alpha\pi).$$

Tuo būdu 3 dydžiai $\det\sigma, \alpha, k$ vienareikšmiškai apibrėžia laidumo tenzorių σ.

3. Laidumo tenzoriaus apskaičiavimas, remiantis fizikiniais matavimais

a) Tenzoriaus invarianto $\det\sigma$ *radimas van der Pauw metodu*

Pamatavus sroves I_{12}, I_{14} ir potencialų skirtumus $\Delta\varphi_{34}, \Delta\varphi_{23}$, laidumą $s = \sqrt{\det\sigma}$ rasime išsprendę van der Pauw lygtį [2]:

$$\exp\bigl(-\pi sh|\Delta\varphi_{34}|/I_{12}\bigr) + \exp\bigl(-\pi sh|\Delta\varphi_{23}|/I_{14}\bigr) = 1. \tag{7}$$

Ši lygtis visada turi vienintelį sprendinį s, kurį galima rasti Niutono būdu parinkus bet kurį pradinį artinį $s^{(0)}$, pvz., $s^{(0)} = 0$. Pastebėsime, kad lygtis (4) išvesta darant prielaidą, kad visų kontaktų ilgiai be galo maži, todėl žemiau įvertinsime atsiradusią paklaidą.

b) Parametrų α ir k radimas

Atlikime dar vieną bandymą, kurio metu bus pamatuota srovė I_{13} ir potencialų skirtumas $\Delta\varphi_{24}$. Tada kontakto κ_4 potencialas $\varphi_4 = (V + \Delta\varphi_{24})/2$, nes $\varphi_2 + \varphi_4 = V$. Įrodysime, kad šių matavimų pakanka.

TEOREMA. *Žinant dydžius* $\sqrt{\det\sigma}, I_{13}, \varphi_4$ *lygčių sistema* (1)–(3) *vienareikšmiškai išsprendžiama atžvilgiu nežinomųjų k ir α.*

Iš tikrųjų, parametrą k vienareikšmiškai apibrėžia lygtis (3), nes

$$A_{0.5,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \bigl(\Gamma(i+0.5)/\,\Gamma(i+1)\bigr)^2 k^i$$

monotoniškai didėjanti (nuo 0 iki ∞) kintamojo k funkcija. Parametrą t vienareikšmiškai apibrėžia lygtis (1):

$$\varphi_4 = V \int_0^t f_{0.5,k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau / A_{0.5,k},$$

nes $f_{0.5,k}(\tau) > 0$. Parametrą α apibrėžia lygtis (2), kai $x = a/2$, kadangi integralų santykis

$$\overline{x} = \int_0^t f_{\alpha,k}(\tau)\,\mathrm{d}\tau / A_{\alpha,k}$$

monotoninė kintamojo α funkcija. Iš tikrųjų, apskaičiavus

$$\frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial t\,\partial\alpha} = \frac{f_{\alpha,k}(\tau)}{(A_{\alpha,k})^2}\Bigl(A_{\alpha,k}\bigl(\ln(t-kt^2) - \ln(t-1)\bigr) - \frac{\partial A_{\alpha,k}}{\partial\alpha}\Bigr),$$

matome, kad ši išvestinė intervale $t \in (0,1)$ turi ir tik vieną ir tik vieną nulį, nes skirtumas $\ln(t-kt^2) - \ln(1-t)$ didėdamas keičiasi nuo $-\infty (t=0)$ iki $+\infty (t=1)$, o funkcija $f_{\alpha,k}(t) = \tau^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}(1-kt)^{\alpha-1} > 0, t \in (0,1)$. Be to, $\frac{\partial\overline{x}}{\partial\alpha}|_{t=0} = \frac{\partial\overline{x}}{\partial\alpha}|_{t=1} = 0$, nes $\overline{x}|_{t=0} \equiv 0$, $\overline{x}|_{t=1} \equiv 1$. Todėl $\frac{\partial\overline{x}}{\partial\alpha} < 0$, $t \in (0,1)$, $\alpha \in (0,1)$. Teorema įrodyta.

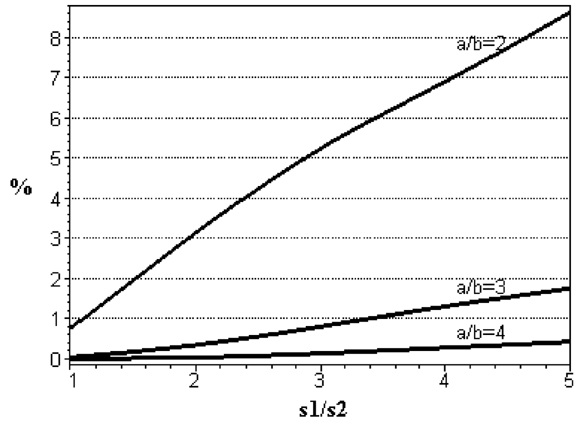
Tuo būdu, α ir k radimui iš eilės sprendžiamos 3 lygtys (3), (1) ir (2). Kaip įrodyta, visų jų dešiniosios pusės monotoninės nežinomojo dydžio funkcijos. Todėl jas patogu spręsti pusiaukirtos būdu, kadangi šis būdas visuomet konverguoja ir nesunku įvertinti sprendinio tikslumą.

4. Metodo paklaidos įvertinimas

Kadangi Van der Pauw lygtis (7) apibrėžia laidumo tenzoriaus determinantą tik tuo atveju, kai visi bandinio kontaktai yra be galo maži, todėl iškyla svarbus sudaryto metodo paklaidos įvertinimo uždavinys.

Pastarojo sprendimui, tarkime, kad laidumo tenzorius σ vertė yra žinoma. Tada, įmanomas toks skaičiavimo algoritmas.

1. Spręsdami iš eilės (4), (5) ir (2) lygtis rasime parametrus α, k ir t. Po to, pagal (1) ir (3) galime rasti potencialą φ_4 ir srovės stiprį I_{13}.
2. Van der Pauw parametrai $|\Delta\varphi_{34}|/I_{12}, |\Delta\varphi_{23}|/I_{14}$ skaičiuojami tokiu būdu. Kadangi kontaktai κ_2 ir κ_4 taškiniai, tai srovių stipriai I_{14}, I_{12} ir potencialų skirtumai $\Delta\varphi_{34}$, $\Delta\varphi_{23}$ nykstamai maži dydžiai. Galima įrodyti, kad jų santykių ribos egzistuoja ir gautos šių ribų išraiškos per pilnuosius elipsinius integralus.
3. Remiantis apskaičiuotais dydžiais $\varphi_4, I_{13}, |\Delta\varphi_{34}|/I_{12}, |\Delta\varphi_{23}|/I_{14}$ ir taikant aprašytą 3 skyriuje metodą, randamas tenzoriaus σ artinys $\tilde{\sigma}$.



2 pav. Paklaidų pasiskirstymas.

Metodo tikslumo įvertinimui pasirinkta santykinė paklaida $\delta = \sum(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})^2 / \sum(\sigma_{ij})^2 \cdot 100\%$, čia $ij = (1,1), (1,2), (2,2)$.

Paklaidų pasiskirstymą iliustruoja 2 pav. Čia $s1/s2$ pagrindinių tenzoriaus dedamųjų santykis, a/b – bandinio kraštinių ilgių santykis. Kiekvieno kreivės taško ordinatė atitinka maksimalią visų tenzorių, kurių kanoninis pavidalas yra $\begin{pmatrix} s1 & 0 \\ 0 & s2 \end{pmatrix}$, paklaidą δ. Pavyzdžiui, kreivės $a/b = 3$ taškas (3, 0,8) reiškia, kad visiems tenzoriams, kurių pagrindinių dedamųjų santykis $1/3 \leqslant s1/s2 \leqslant 3$, santykinė paklaida neviršija 0,8%.

Šis darbas atliktas tiriant plonųjų metalinių sluoksnių elektrinio laidumo anizotropiškumą, atsirandantį gaminant sluoksnius elektrinio lauko poveikyje. Darbo naujumą sudaro tai, kad buvo atsisakyta klasikinių jo nustatymo būdų [3], o pritaikytas van der Pauw metodas, kuris buvo sukūrtas ir naudojamas Holo efekto uždavinių sprendimui.

Literatūra

1. V. Kleiza, J. Kleiza, Method of calculation of conductivity tenzor, *DAN SSSR*, **325**(4), 711–715 (1992).
2. W.L.V. Price, Extension of van der Pauw's theorem for measuring specific resistivity in discs of arbitrary shape to anisotropic media, *J. Phys. D:Appl. Phys.*, **5**, 1127–1132 (1972).
3. J.F. Nye, *Physical Properties of Crystals*, Oxford University press, London (1964).

SUMMARY

J. Kleiza, V. Kleiza. A method of calculation of specific conductivity tensor of a anisotropic media

The article presents a method for calculating specific electrical conductivity tensor. This method is based on substantiation of uniqueness and existents theorems.

Keywords: anisotropy, electrical conductivity tensor, boundary value problems.