Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 437–441

n-os eilės Filono kvadratūrinės formulės paklaidos įvertinimas

Kostas PLUKAS, Danutė PLUKIENĖ (KTU)
el. paštas: kostas.plukas@ktu.lt

1. Įvadas

Filono kvdratūrinė formulė yra skirta apskaičiuoti integralus

$$s = \int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{ir} \quad c = \int_a^b f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Taikant klasikinę Filono kvadratūrinę formulę [4], funkcija $f(x)$ intervale $[x_{i-1}, x_{i+1}] \subseteq [a, b]$ keičiama kvadratiniu interpoliaciniu polinomu $y(x) = a + b(x - x_i) + c(x - x_i)^2$, einančiu per taškus $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, čia $x_i = (x_{i-1} + x_{i+1})/2$. Po to gautas itegralas skaičiuojamas tiksliai.

Literatūroje [3] išnagrinėta n-os eilės Filono kvadratūrinė formulė, kai funkcija $f(x)$ nagrinėjamame integravimo intervalo subintervale $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ keičiama n-os eilės interpoliaciniu polinomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kurį nusako vienas nuo kito lygiai nutolę $(n + 1)$ interpoliavimo mazgai, pradedant kairiuoju ir baigiant dešiniuoju subintervalo galais. Po to integralai $\int_\alpha^\beta P_n(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$ ir $\int_\alpha^\beta P_n(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$ skaičiuojami tiksliai.

Minėtame darbe n-os eilės Filono kvadratūrinės formulės paklaidą siūloma apskaičiuoti remiantis rezultatais, gautais tame pačiame subintervale taikant integravimo žingsnius h ir $h/2$. Čia siūlomas kitas šios formulės paklaidos įvertinimo būdas, paremtas įdėtųjų formulių idėja [2]: paklaida subintervale $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ apskaičiuojama pagal formulę

$$\delta = \max\left(\left|\int_\alpha^\beta \left|P_n(x) - P_{n-1}(x)\right| \cos(kx)\,\mathrm{d}x\right|, \left|\int_\alpha^\beta \left|P_n(x) - P_{n-1}(x)\right| \sin(kx)\,\mathrm{d}x\right|\right), \tag{2}$$

čia $P_{n-1}(x)$ – interpoliacinis polinomas, nusakomas tais pačiais interpoliavimo mazgais, kaip ir $P_n(x)$, atmetus vieną vidinį mazgą. Galime tikėtis, kad (2) formulė siaurame subintervale $[\alpha, \beta]$ duos pakankamai tikslų paklaidos įvertį, kadangi $|f(x) - P_n(x)| \approx |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$ kai interpoliavimo žingsnis yra mažas [1]. Kita vertus, (2) formulė yra ekonomiškesnė nei paklaidos formulė, pagrįsta intergravimo rezultatais, gautais su skirtingais integravimo žingsniais.

2. Polinomo koeficientų apskaičiavimas

Pirmasis n-os eilės Filono kvadratūrinės formulės etapas yra polinomo $P_n(x)$ koeficientų apskaičiavimas. Vienas iš patogiausių koeficientų apskaičiavimo būdų yra Aitkeno schema [5], skirta apskaičiuoti interpoliacinio polinomo reikšmę duotame taške. Modifikavus šią schemą, galima lengvai apskaičiuoti interpoliacinio polinomo koeficientus.

Duoti interpoliavimo taškai $(x_i, y_i), i = \overline{1, n+1}$. Apskaičiuoti polinomo $P_n(x) = a_{n+1}x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1$ koeficientus.

Apskaičiuoti koeficientus $a_i, i = \overline{1, n+1}$ patogu MATLAB‘o aplinkoje, nes MATLAB‘as įgalina paprastai atlikti veiksmus su koeficientų masyvais.

Algoritmas apskaičiuoti polinomo $P_n(x)$ koeficientus

```
p=zeros(n+1,n+1);
p(:,1)=y;
for k=1:n
  for i=1:n+1-k
    p(i,1:k+1)=([p(i+1,1:k)-p(i,1:k) 0]+...
    [0 p(i,1:k)*x(i+k)-p(i+1,1:k)*x(i)])/(x(i+k)-x(i));
  end;
end;
a=p(1,:);
```

Kad $P_n(x)$ koeficientų apskaičiavimo uždavinys būtų gerai sąlygotas, naudosime Čiobyševo polinomų bazę: pirmiausia apskaičiuosime interpoliacinio polinomo koeficientus Čiobyševo polinomų bazėje, o po to, įrašę Čiobyševo polinomų išraiškas bazėje $1, x, x^2, \cdots, x^n$ ir sutraukę panašius narius, gausime $P_n(x)$ įprastinėje bazėje. Šį procesą galima supaprastinti tokiu būdu:

1) įvedame pakeitimą $t = (2x - (b+a))/(b-a)$;
2) taikome anksčiau pateiktą polinomo koeficientų apskaičiavimo algoritmą vietoje x reikšmių imdami t reikšmes.

3. Integralų apskaičiavimas

Kaip anksčiau minėjome, (1) formulės integralai apskaičiuojami funkciją $f(x)$ pakeičiant n-os eilės polinomu $P_n(x)$, t.y.

$$c = \int_a^b f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b P_n(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{n} a_l c_l,$$

$$s = \int_a^b f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b P_n(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{n} a_l s_l, \tag{3}$$

čia $c_l = \int_a^b x^l \cos(kx)\,\mathrm{d}x$, o $s_l = \int_a^b x^l \sin(kx)\,\mathrm{d}x$, $l = \overline{0, n}$.

Apskaičiavę $s_0 = \int_a^b \sin(kx)\,\mathrm{d}x$ ir $c_0 = \int_a^b \cos(kx)\,\mathrm{d}x$ bei s_l ir c_l vieną kartą suintegravę dalimis, gausimę tokias s_l ir c_l apskaičiavimo rekurentines formules

$$c_l = \bigl(b^l \sin(kb) - a^l \sin(ka)\bigr)/k - \frac{l}{k} s_{l-1},$$

$$s_l = \bigl(b^l \cos(kb) - a^l \cos(ka)\bigr)/k + \frac{l}{k} c_{l-1}, \quad l = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Įvertinant tai, kad $P_n(x)$ užrašomas Čiobyševo polinomų bazėje, (4) formulės turi būti modifikuotos. Žemiau pateikiamas c_l ir s_l apskaičiavimo modifikuotas algoritmas.

Algoritmas apskaičiuoti c_l ir s_l, kai $P_n(x)$ užrašomas Čiobyševo polinomų bazėje

```
c(1)=(sin(k*b)-sin(k*a))/k;
s(1)=-(cos(k*b)-cos(k*a))/k;
cs=1; ss=-1; tk=2/(b-a);
for el=1:n
      c(el+1)=(sin(k*b)+cs*sin(k*a)-tk*el*s(el))/k;
      s(el+1)=(-cos(k*b)+ss*cos(k*a)+tk*el*c(el))/k;
      cs=-cs; ss=-ss;
end
```

4. Kvadratūrinės formulės paklaidos įvertinimas

Remdamiesi interpoliacinio polinomo koeficientų bei c_l ir s_l apskaičiavimo algoritmais, n-os eilės Filono kvadratūrinės formulės paklaidą kiekviename integravimo intervalo subintervale įvertinsime tokiu būdu.

1. Apskaičiuojame n-os eilės interpoliacinio polinomo, apibrėžiamo mazgais, kurie integravimo subintervalą dalyja į n lygių dalių, $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ koeficientus.
2. Atmetame vieną vidinį (m-ąjį, $1 \leqslant m \leqslant n-1$) interpoliavimo mazgą.
3. Apskaičiuojame interpoliacinį polinomą $P_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$, kurį apibrėžia 2 punkto interpoliavimo mazgai.
4. Apskaičiuojame paklaidą pagal formulę

$$\delta = \max\left(\Bigl|\sum_{l=0}^{n} (a_l - b_l) s_l\Bigr|, \Bigl|\sum_{l=0}^{n} (a_l - b_l) c_l\Bigr|\right),$$

čia $b_n = 0$.

5. Eksperimentinis tyrimas

Remiantis pateiktomis n-os eilės Filono kvadratūrinės formulės ir jos paklaidos išraiškomis, MATLAB'o aplinkoje buvo sudaryta adaptyviojo integravimo strategiją realizuojanti procedūra ir apskaičiuoti (1) formulės integralai, kai $f(x) = \mathrm{e}^x$. Buvo keičiamos parametrų k, ε ir m reikšmės, o taip pat interpoliacinio polinomo eilė. Skaičiavimo rezultatai patalpinti 1 ir 2 lentelėse. Lentelėse simboliu nn žymimas panaudotas pointegralinės funkcijos reikšmių skaičius.

1 lentelė. Funkcija $f(x) = \mathrm{e}^x$, m – vidurio taškas

ε	$k=1$		$k=5$		$k=10$	
	n	nn	n	nn	n	nn
10^{-4}	8 12	81 49	8 12	89 49	8 12	73 49
10^{-6}	8 12	129 73	8 12	137 85	8 12	145 85
10^{-8}	8 12	225 109	8 12	241 121	8 12	241 109

2 lentelė. Funkcija $f(x) = \mathrm{e}^x$, $m = 2$

ε	$k=1$		$k=5$		$k=10$	
	n	nn	n	nn	n	nn
10^{-4}	8 12	113 61	8 12	113 49	8 12	105 49
10^{-6}	8 12	201 85	8 12	193 85	8 12	177 85
10^{-8}	8 12	345 121	8 12	345 121	8 12	337 121

Kai $f(x) = \mathrm{e}^x$, tai (1) formulės integralus galima apskaičiuoti tiksliai. Eksperimento metu buvo pastebėta, kad visais atvejais norimas tikslumas buvo pasiektas. Tačiau, kai $m = 2$, pasiektas tikslumas eile buvo aukštesnis. Kap matyti iš skaičiavimo rezultatų, mažesnis panaudotų pointegralinės funkcijos reikšmių skaičius yra, kai n yra didesnis, o m – vidurio taškas.

6. Išvados

1. Pasiūlyta n-os eilės Fiolono kvadratūrinės formulės paklaidos įverčio formulė, pagrįsta įdėtųjų formulių metodu.

2. Pateikta paklaidos įverčio formulė skirtingai nei formulės, besiremiančios skirtingais integravimo žingsniais gautais rezultatais, įgalina sudaryti paprestesnes ir efektyvesnes adaptyviojo integravimo strategiją realizuojančias procedūras.

Literatūra

1. N.S. Bakhvalov, *Numerical Methods*, vol. I, Moscow (1973) (in Russian).
2. E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differencial Equations*, I *Nonstiff Problems*, Moscow (1990) (in Russian).
3. K. Plukas, D. Plukienė, Computing coefficients of Fourier series, *Informatica*, **8**(2), 273–288 (1997).

4. K.J. Tranter, *Transformations in Mathematical Physics*, GITTL, Moscow (1956) (in Russian).
5. Ch.W. Ueberhuber, *Numerical Computation: Methods, Software, and Analysis*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1997).

SUMMARY

K. Plukas, D. Plukienė. Error estimation for n-th order Filon quadrature formula

In this paper the error estimation for n-th order Filon quadrature formula is discussed.

Keywords: definite integral, integrand function, quadrature formula, error estimate, adaptive procedure.