Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 494–498

Šviesolaidinės atspindžio sistemos bazinio signalo tiesinės dalies analitinės išraiškos

Vytautas KLEIZA (KTU), Jonas KLEIZA (VGTU)
el. paštas: vytautas.kleiza@ktl.mii.lt, kleiza@mail.tele2.lt

Šiame darbe nustatyta šviesolaidinės atspindžio sistemos (ŠAS) pagrindu sukurto atstumo jutiklio bazinio signalo tiesinės dalies lokalizacijos analitinė priklausomybė nuo ŠAS konstrukcijos parametrų: atstumo tarp šviesolaidžių aktyviųjų galų b, šviesolaidžių skersmens $2a$, atstumo iki veidrodžio h ir kt. Gautos analitinės signalų šeimos absoliutinių maksimumų ir signalų tiesinių dalių išraiškos. Šiame tyrime tiesine visų signalų dalimi priimta laikyti pastarųjų persilenkimų taškus, todėl tokių vietų radimas suvestas į tiriamų signalų antrųjų išvestinių nulių išsidėstymą.

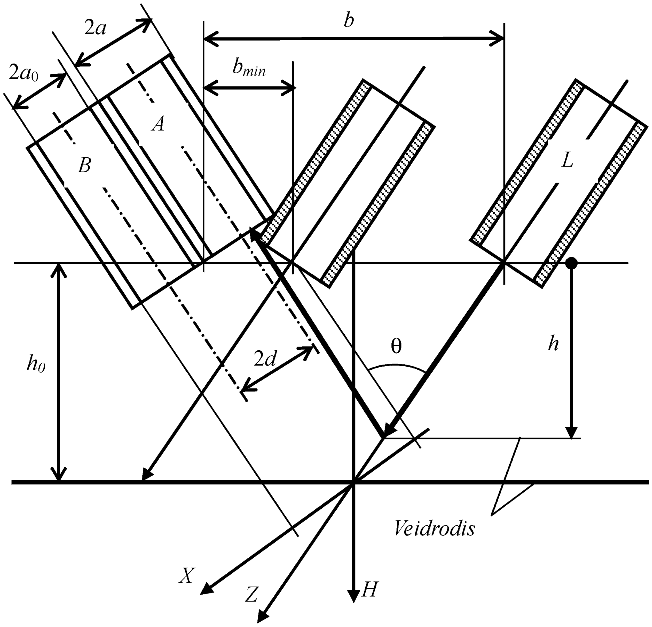
Gautos analitinės signalų šeimos absoliutinių maksimumų ir tiesinių dalių lokalizacijos išraiškos yra ženkliai tikslesnės už ankstesniuose darbuose [2, 3] gautas empirines (eksponentės tipo) formules, ką patvirtino eksperimentas. Tirtas darbe [1] aprašytas šviesolaidinis mikrometras stabilus išoriniams elektromagnetiniams triukšmams, šviesos lenkimui, šviesos šaltinio degradacijai ir fliuktuacijoms bei veidrodžio atspindžio koeficiento pokyčiams. Mikrometro jautris priklauso tik nuo konstrukcijos parametrų verčių ir gali išmatuoti absoliutinį atstumo pokytį. Mikrometras turi spinduliuojantį ir du priimančiuosius šviesolaidžius (visi vienoje plokštumoje). Darbe [2] buvo parodyta, kad šio mikrometro (slinkties sensoriaus) jautris gali būti ženkliai padidintas keičiant pastarojo konstrukciją (1 pav.). Darbe [3] buvo atliktas pusiau empirinis ir eksperimentinis sensoriaus jautrio tyrimas, pagrindinai pagal parametrą h naudojant skaitmeninio diferencijavimo metodą.

Šviesą emituojantis šviesolaidis L dėl atspindžio (1 pav.) indukuoja priimančiuose šviesolaidžiuose A ir B signalus, kurių analitinės išraiškos:

$$A = A(h, b, d) \equiv C_0 \exp\left\{-(X/R)^2\right\}/\pi R^2, \quad B = B(h, b, d) \equiv A(h, b, -d), \quad (1)$$

čia:

$$\left.\begin{aligned}
&h \geqslant 0, \ \ d \geqslant a > 0, \ \ k > 0, \ \ 0 < \theta, \ \ \theta_c > \pi/4, \\
&b \geqslant b_{\min} = a(3 - \tan^2\theta)\cos\theta > 0, \\
&R = R(h, b) \equiv a_0' + a_1' h, \quad X = X(h, b, d) \equiv a_0'' + a_1'' h, \\
&a_0' = a + bk\tan(\theta_c)\sin(\theta), \quad a_1' = 2k\tan(\theta_c)\cos(\theta), \\
&a_0'' = -b\cos(\theta) + d, \quad a_1'' = 2\sin(\theta),
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$



1 pav. Šviesolaidinė atspindžio sistema: h – atstumas iki veidrodžio, b – atstumas tarp šviesolaidžių aktyviųjų galų, L – šviesą emituojantis šviesolaidis, A ir B – šviesą priimantieji šviesolaidžiai, $2a$ – šviesolaidžių skersmuo, $2a_0$ – šviesolaidžių šerdies skersmuo, θ_c – šviesolaidžių kampinė apertūra.

Esant apribojimams (2), įrodyti:

1 TEIGINYS. *Jei $h > 0$ ir $b \geqslant b_{\min}$, funkcija $R(h,b)$ – griežtai didesnė už nulį, t.y.*

$$R(h,b) > 0. \tag{3}$$

2 TEIGINYS. *Signalų A ir B išvestinės pagal atstumą h (iki atspindinčio paviršiaus plokštumos) lygios*

$$\frac{\partial A}{\partial h} = -2\frac{A\omega(h,b,d)}{R^3(h,b)}, \qquad \frac{\partial B}{\partial h} = -2\frac{B\omega(h,b,-d)}{R^3(h,b)},$$

o funkcija $\omega = \omega(h,b,d)$ yra antrojo laipsnio polinomas atžvilgiu h:

$$\omega = \omega(h,b,d) \equiv a_1' R^2 + X(a_1'' R - a_1' X) \equiv \sum_{i=0}^{2} \alpha_i(b,d)h^i.$$

Atsižvelgiant į (3), pirmoji išvestinė virsta nuliu tada ir tiktai tada, kai $\omega(h,b,d) = 0$ turime, kad jei $q_1^{(A)}(b,d), q_2^{(A)}(b,d)$ – lygties $\omega(h,b,d) = 0$ šaknys (atžvilgiu h, priklausančios nuo dviejų parametrų b ir d), tada reikiama (reali ir teigiama) šaknis lygi

$$h_A(b,d) = \big(-\alpha_1(b,d) + \sqrt{\alpha_1^2(b,d) - 4\alpha_0(b,d)\alpha_2(b,d)}\big)/2\alpha_2(b,d) > 0,$$
$$h_B(b,d) = h_A(b,-d),$$

o signalų A ir B maksimumai $\max_{h>0} A(h,b,d) = A_{\max}(b,d)$ ir $\max_{h>0} B(h,b,d) = B_{\max}(b,d)$ išreiškiami parametrinėmis (parametrų b ir d) lygtimis (2 pav.)

$$\begin{cases} x = h_A(b,d), \\ y = A(h_A(b,d),b,d), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = h_B(b,-d), \\ y = B(h_B(b,-d),b,d). \end{cases}$$

3 TEIGINYS. *Signalų A ir B antrosios išvestinės pagal atstumą h (iki atspindinčio paviršiaus plokštumos) lygios*

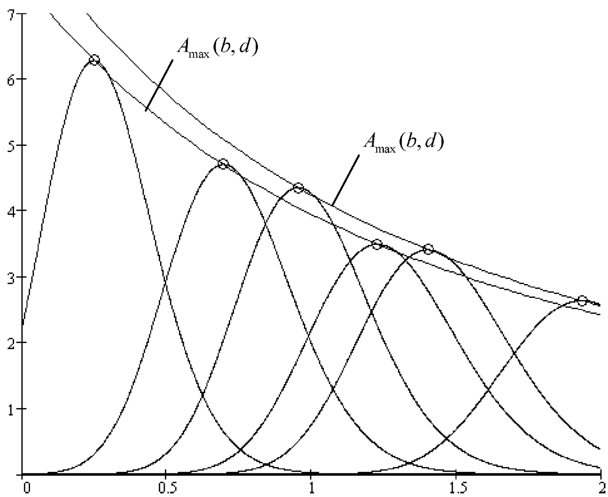
$$\frac{\partial^2 A}{\partial h^2} = -2\frac{A\Omega(h,b,d)}{R^6(h)}, \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial h^2} = -2\frac{A\Omega(h,b,-d)}{R^6(h)},$$

čia

$$\Omega(h,b,d) = -2\omega^2 + R^2\Big(R\frac{\partial\omega}{\partial h} - 3\omega\frac{\partial R}{\partial h}\Big), \qquad \frac{\partial\omega}{\partial h} = \big(2(a_1')^2 + (a_1'')^2\big)R - a_1'a_1''X,$$

arba

$$\Omega(h,b,d) = -2\big[a_1'R^2 + X(a_1''R - a_1'X)\big]^2 + R^2\Big\{\big[\big(2(a_1')^2 + (a_1'')^2\big)R - a_1'a_1''X\big]R\Big\}$$
$$- 3R^2a_1'\big[a_1'R^2 + X(a_1''R - a_1'X)\big],$$



2 pav. Signalų $A(h,b_{min},0.2)$, $A(h,1,0.2)$, $A(h,1.5,0.2)$, $B(h,b_{min},0.2)$, $B(h,1,0.2)$, $B(h,1.5,0.2)$ ir jų maksimumų $A_{max}(h)$, $B_{max}(h)$ kreivės.

o funkcija $\Omega = \Omega(h, b, d)$ *yra ketvirtojo laipsnio polinomas atžvilgiu* h*:*

$$\Omega(h, b, d) = \sum_{i=0}^{4} \beta_i(b, d)h^i. \tag{4}$$

Atsižvegiant į (3), antroji išvestinė virsta nuliu tada ir tiktai tada, kai $\Omega(h, b, d) = 0$. Ketvirto laipsnio lygčiai $\Omega(h, b, d) = 0$ spręsti (atžvilgiu h) panaudotos Cardano–Ferrari formulės [4, 5], kurios nusako tiesiogines šaknų išraiškas per daugianario $\Omega(h, b, d)$ koeficientus $\beta_i(b, d)$. Dviejų reikiamų (realių ir teigiamų) šaknų $h_{AA}^{(\mathrm{I})}(b, d) < h_{AA}^{(\mathrm{II})}(b, d)$ išskyrimui panaudota tokia procedūra: $h_{AA}^{(\mathrm{I})}(b, d)$ yra didžiausia reali šaknis, mažesnė už $h_A(b)$, o $h_{AA}^{(\mathrm{II})}(b, d)$ – mažiausia reali šaknis, didesnė už $h_A(b)$. Įrodytas

4 TEIGINYS. *Egzistuoja dvi lygties* $\Omega(h, b, d) = 0$ *realios šaknys, kurioms galioja griežtos nelygybės*

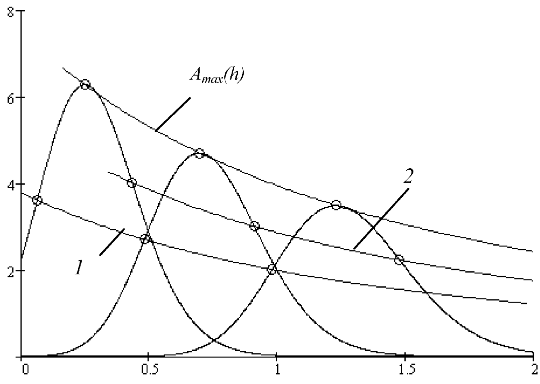
$$0 < h_{AA}^{(\mathrm{I})}(b, d) < h_A(b, d) < h_{AA}^{(\mathrm{II})}(b, d),$$

o signalų A ir B persilenkimo taškų koordinatės ir išreiškiamos parametrinėmis (*parametrų b ir d*) *lygtimis*

$$\begin{cases} x = h_{AA}^{(\mathrm{I})}(b, d), \\ y = A\big(h_{AA}^{(\mathrm{I})}(b, d), b, d\big), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = h_{BB}^{(\mathrm{I})}(b, d), \\ y = A\big(h_{BB}^{(\mathrm{I})}(b, d), b, d\big), \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x = h_{AA}^{(\mathrm{II})}(b, d), \\ y = A\big(h_{AA}^{(\mathrm{II})}(b, d), b, d\big), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = h_{BB}^{(\mathrm{II})}(b, d), \\ y = A\big(h_{BB}^{(\mathrm{II})}(b, d), b, d\big), \end{cases} \tag{6}$$

be to, lygtys (5) *nusako signalų A ir B taškus, kuriuose kreivės keičiasi iš iškilių į apačia į iškilias į viršų, o lygtys* (6) *– priešingai* (*3 pav.*).



3 pav. Signalų $A(h, b_{min}, 0.2)$, $A(h, 1, 0.2)$, $A(h, 1.5, 0.2)$ ir jų maksimumų $A_{max}(h)$, 1 ir 2 persilenkimo taškų kreivės.

3 pav. pažymėti taškai (jų abscisės $h_{AA}(b,d)$) ir yra ieškomos signalų tiesinių dalių centrai, t.y. signalai šių taškų aplinkose aproksimuojami tiesiniais:

$$\left.\begin{aligned} A(h,b,d) &\approx \frac{\partial A}{\partial h}\Big|_{h=h_{AA}(b,d)}\big(h-h_{AA}(b,d)\big)+A\big(h_{AA}(b,d),b,d\big),\\ B(h,b,d) &\approx \frac{\partial B}{\partial h}\Big|_{h=h_{BB}(b,d)}\big(h-h_{BB}(b,d)\big)+B\big(h_{BB}(b,d),b,d\big). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Atsižvelgiant į įrodytus teiginius seka, kad visos funkcijos, esančios išraiškose (7), yra žinomos ŠAS konstrukcijos parametrų (2) funkcijos.

Literatūra

1. W.H. Ko, K.-M. Chang, G.-J. Hwang, A fiber-optic reflective displacement micrometer, *Sensors & Actuators*, **A 49**, 51–55 (1995).
2. J. Verkelis, R. Jankevičius, R. Šarmaitis, Light transmission in reflection fiber system, *Lith. J. of Physics*, **42**, 99–109 (2002).
3. V. Kleiza, J. Paukštė, J. Verkelis, Modelling light transmission in a fiber – optical reflection system, *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, **9**(2), 129–138 (2004).
4. M. Abramowitz, C.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York (1972).
5. P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer-Verlag, New York (1995).

SUMMARY

V. Kleiza, J. Kleiza. The analytic expressions of signal linear parts for fiber-optic reflective system

In this work the analytic expressions of absolute maxima and dislocation of signal linear parts for family of signals curves for fiber-optic reflective system have found.

Keywords: fiber-optic system, modelling, displacement.