Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 515–520

Stochastinių logistinių dėsnių ir tankio mišinių taikymas medynų augimo analizėje

Petras RUPŠYS, Danutė RAŠKINIENĖ (LŽŪU)
el. paštas: rpetras@tech.lzua.lt

Reziumė. Medynų skersmeniui modeliuoti naudojami stochastiniai logistiniai augimo dėsniai (Verhulsto, Gompertco, Mitscherlicho, Bertalanfio, Richardo). Skersmens kinetika išreiškiama atitinkama stochastine diferencialine lygtimi, kurioje nepriklausomas kintamasis yra medyno amžius arba aukštis. Perėjimo tikimybių tankio funkcijai užrašoma Kolmogorovo lygtis su dalinėmis išvestinėmis. Straipsnyje pateiktos Kolmogorovo lygties sprendinio skaitmeninės aproksimacijos. Rezultatai iliustruojami pavyzdžiu, kuriame analizuojami eksperimentiniai stebėjimai gauti išmatavus 1553 pušies medžius.

Tiriamo objekto kinetika (augimas) užima svarbią vietą tiriant procesus ekologijoje, ekonomikoje, finansuose, biologijoje ir kitose srityse. Augimo proceso kinetiką įprasta apibrėžti paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis. Nepaisant to, kad augimo procesas yra įtakojamas atsitiktinumo fenomeno, praktikoje dažniausiai naudojami determinuotieji modeliai. Taikymuose proceso suvidurkinta trendo kinetika yra išreiškiama vienu iš logistinio modelio pavidalų: Verhulsto, Gompertco, Mitscherlicho, Bertalanfio, Richardo arba tam tikru šių modelių mišiniu [1]. Apibendrinto pavidalo determinuotasis logistinis augimo modelis, išreiškiantis proceso kitimo trajektoriją $x(t)$ priklausomai nuo laiko t (arba kito požymio), gali būti užrašytas paprastąja diferencialine lygtimi [1]

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = r(x(t))^{\alpha}\left(1 - \left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

čia r, K, α, β yra realūs skaičiai. Parametras r nusako vidinį augimo greitį per laiko vienetą. Parametras K parodo parametro augimo proceso viršutinį arba apatinį biologinės populiacijos lygį. Nesunku įsitikinti, kad laikui artėjant į ∞ trajektorija $x(t)$, išreikšta (1) lygybe, artėja į prisotinimo lygį K, t.y. $\lim_{t\to\infty} x(t) = K$.

Apibendrintojo logistinio augimo modelio atskiri atvejai kartu su atitinkamomis trajektorijomis pateikti 1 lentelėje. Šių augimo dėsnių trajektorijos $x(t)$ priklauso tiktai nuo laiko t bei parametrų r, K. Reikia pastebėti, kad pavidalo (1) determinuotieji augimo dėsniai įtakoja didelę modeliu nepaaiškintą variaciją.

Stochastiniai augimo modeliai leidžia sumažinti nepaaiškintą modeliuojamo dydžio kintamumą, bei praktiniuose taikymuose realizuoti atsitiktinumo fenomeną, kuris daro neapibrėžtą stochastinę įtaką proceso eigai. Stochastinis augimo dėsnis gali būti išreikštas paprastąja stochastine diferencialine lygtimi, kurioje difuzija yra tiesiog proporcinga triukšmo intensyvumui σ ir trajektorijai $x(t)$. Augimo tikimybinei kinetikai apibrėžti naudosime paprasčiausią atsitiktinį procesą – Gauso baltąjį

1 lentelė. Determinuotųjų logistinių augimo dėsnių trajektorijos

Dėsnis	Parametrai		Trajektorija $x(t)$
	α	β	
Verhulsto	1	1	$\dfrac{Kx_0}{x_0+(K-x_0)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}}$
Gompertco	1	$\beta\to 0$	$K\left(\dfrac{x_0}{K}\right)^{\mathrm{e}^{r(t-t_0)}}$
Mitscherlicho	0	1	$K+(x_0-K)\mathrm{e}^{-\frac{r}{K}(t-t_0)}$
Bertalanfio	2/3	1/3	$K\left(1-\left(1-\left(\dfrac{x_0}{K}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r(t-t_0)}{3K^{1/3}}}\right)^3$
Richardo	1	$\beta\geqslant -1$	$\left(\dfrac{\left(\frac{x_0}{K}\right)^{\beta}\mathrm{e}^{r\beta(t-t_0)}-\left(\frac{x_0}{K}\right)^{\beta}+1}{\left(\frac{x_0}{K}\right)^{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\beta}}K\mathrm{e}^{r(t-t_0)}$

triukšmą. Stochastinį augimo modelį užrašome taip:

$$\mathrm{d}x(t)=r(x(t))^{\alpha}\left(1-\left(\frac{x(t)}{K}\right)^{\beta}\right)\mathrm{d}t+\sigma x(t)\,\mathrm{d}w(t),\quad x(t_0)=x_0. \tag{2}$$

Praktinis stochastinių modelių panaudojimas reikalauja įvertinti dreifo funkcijos ir difuzijos funkcijos parametrus r, K, σ. Paminėtų parametrų įvertinimams gauti galime naudoti maksimalaus tikėtinumo [2], [3] arba L^1 normos procedūras [3].

Darbo tikslas – užrašyti medyno medžių skersmens skirstinio tankio funkciją $p(x,t,h)$, kuri priklauso nuo medžių amžiaus ir aukščio.

Įvedame pažymėjimus:

$$f(x(v))=rx(v)^{\alpha}\left(1-\left(\frac{x(v)}{K}\right)^{\beta}\right),\quad \sigma(x(v))=\sigma x(v),$$

čia v gali būti medžio amžius t arba medžio aukštis h. Perėjimo tikimybių tankio funkcija $p(x,v)$ tenkina Kolmogorovo lygtį [4]

$$\frac{\partial p(x,v)}{\partial v}=-\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x,v)p(x,v)\big)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big((\sigma(x))^2p(x,v)\big). \tag{3}$$

Gompertco dėsnio atveju, lygčiai su dalinėmis išvestinėmis (3), galime užrašyti tikslųjį sprendinį. Darbe visiems nagrinėjamiems logistiniams augimo dėsniams lygties (3) sprendinio $p(x,v)$ apytikslę skaitmeninę aproksimaciją užrašome tokiu pavidalu:

$$\begin{aligned}\frac{p(x_i,v_{j+1})-p(x_i,v_j)}{\tau}={}&\frac{\sigma^2}{4}x_i^2\frac{p(x_{i+1},v_{j+1})-2p(x_i,v_{j+1})+p(x_{i-1},v_{j+1})}{h^2}\\&+\frac{\sigma^2}{4}x_i^2\frac{p(x_{i+1},v_j)-2p(x_i,v_j)+p(x_{i-1},v_j)}{h^2}\end{aligned}$$

$$- f(x_i)\frac{p(x_{i+1}, v_{j+1}) - p(x_{i-1}, v_{j+1})}{2h},$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad h = \frac{x_{\sup}}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \quad \tau = \frac{v_{\sup}}{M}.$$

Pradinės ir kraštinės sąlygos apibrėžiamos taip:

$$p(0, v) = 0, \quad v \in [0; v_{\sup}], \quad p(x_{\sup}, v) = 0, \quad v \in [0; v_{\sup}], \quad p(0, 0) = \delta(0),$$

čia $\delta(\cdot)$ yra Dirako funkcija, M, N yra žingsnių skaičiai. Stochastinių logistinių augimo dėsnių (2) stacionariuosius sprendinius pateikiame 2 lentelėje ir pavaizduojame 2 pav. kartu su perėjimo tikimybių tankio funkcijomis.

Medyno medžių skersmens skirstinio tankio funkciją užrašome tankio funkcijų mišinių pavidalu

$$p(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j p(x, t_j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_2} w_j p(x, h_j),$$

čia $\sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j = 1, \sum_{j=1}^{m_2} w_j = 1$, m_1 – amžiaus klasių skaičius, m_2 – aukščio klasių skaičius, λ_j – j-osios amžiaus klasės medžių dalis medyne, w_j – j-osios aukščio klasės medžių dalis medyne.

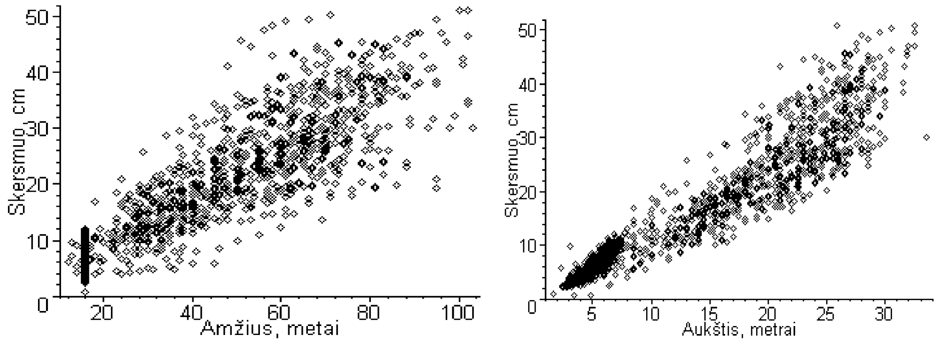
Matematinio modelio imitavimui naudosime pušies medynų stebėjimo duomenis. Buvo stebėti 1553 medžiai Dubravos girininkijoje. Stebėjimo duomenis pateikiame 1 pav.

Stochastinių augimo dėsnių parametrų r, K, σ įvertinimai buvo apskaičiuoti maksimalaus tikėtinumo metodu ir pateikti 3 lentelėje.

Penkių taikomų augimo dėsnių perėjimo tikimybių tankio funkcijų $p(x, v)$ skaitmenines aproksimacijas pateikiame 2 pav. Iš 3 lentelės matome, kad medyno skersmeniui modeliuoti pagal amžiaus priklausomybę tinkamiausias yra Bertalanfio dėsnis,

2 lentelė. Stochastinių logistinių augimo dėsnių stacionarieji sprendiniai

Dėsnis	Tankio funkcija	Normalizavimo konstanta N_s
Verhulsto	$N_s x^{2(\frac{r}{\sigma^2}-1)} \mathrm{e}^{-2\frac{rx}{K\sigma^2}}$	$\left(\frac{2r}{K\sigma^2}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} / \Gamma\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)$
Gompertco	$N_s x^{-2} \mathrm{e}^{-\frac{r\ln^2\frac{K}{x}}{\sigma^2}}$	$\frac{K}{\sigma}\sqrt{\frac{r}{\pi}}$
Mitscherlicho	$N_s x^{-2(\frac{r}{K\sigma^2}+1)} \mathrm{e}^{-2\frac{r}{\sigma^2 x}}$	$\left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)^{\frac{2r}{K\sigma^2}+1} / \Gamma\left(\frac{2r}{K\sigma^2}+1\right)$
Bertalanfio	$N_s x^{-2(\frac{r}{K^{1/3}\sigma^2}+1)} \mathrm{e}^{-6\frac{r}{x^{\frac{1}{3}}\sigma^2}}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{6r}{\sigma^2}\right)^{3(\frac{2r}{K^{1/3}\sigma^2}+1)} / \Gamma\left(3\left(\frac{2r}{K^{1/3}\sigma^2}+1\right)\right)$
Richardo	$N_s\left(\frac{x}{K}\right)^{2(\frac{r}{\sigma^2}-1)} \mathrm{e}^{-2r\frac{(x/K)^\beta}{\beta\sigma^2}}$	$\frac{\beta}{K}\left(\frac{2r}{\beta\sigma^2}\right)^{\frac{1}{\beta}(\frac{2r}{\sigma^2}-1)} / \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\right)$



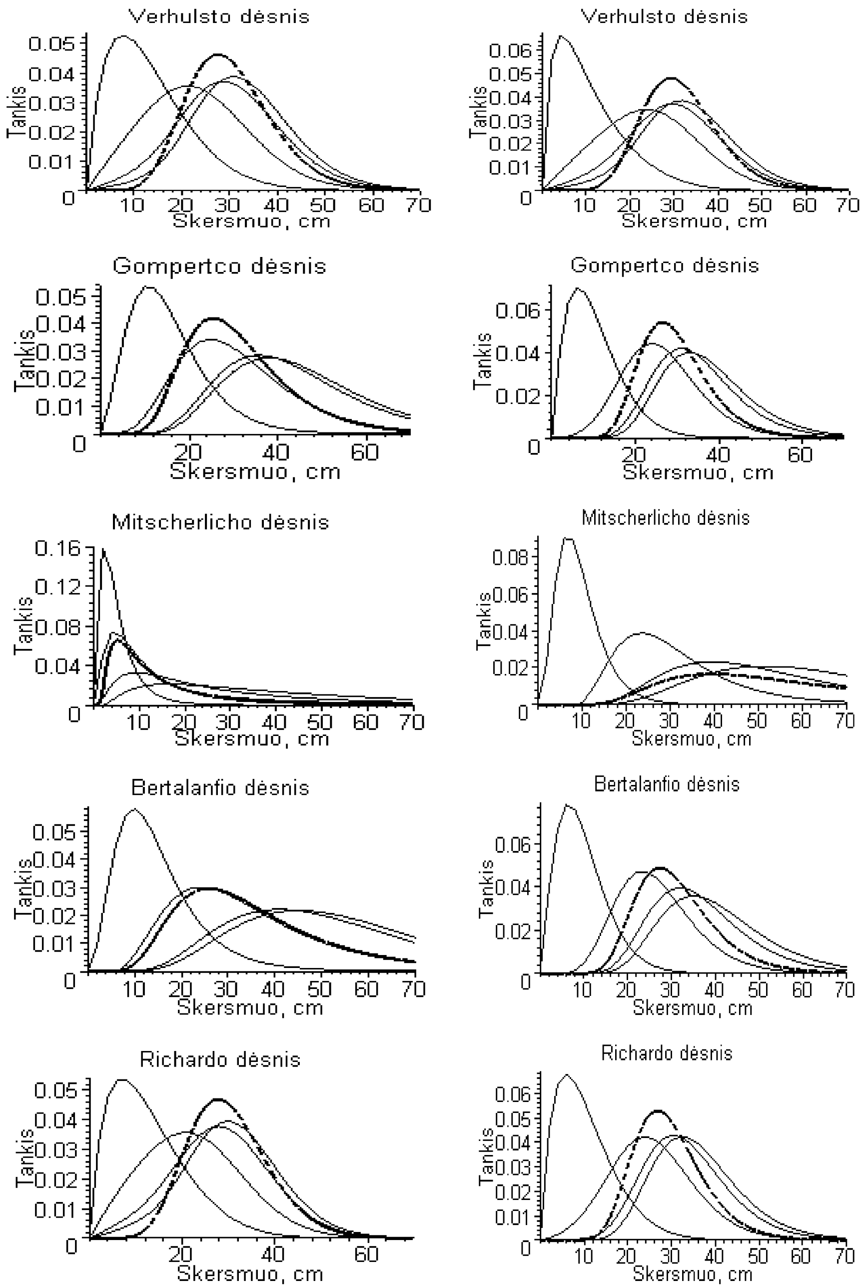
1 pav. Pušies medynų stebėjimo duomenys.

3 lentelė. Parametrų įvertinimai

Dėsnis	Požymis	Parametrai				Determinacijos koeficientas R^2 $\gamma = 0,95$		
		r	K	β	σ	$R^2_{apatinis}$	$R^2_{vidurkis}$	$R^2_{viršutinis}$
Verhulsto	Amžius	0,1139	32,9079		0,1354	0,6604	0,6887	0,7078
	Aukštis	0,3637	33,8910		0,2230	0,7312	0,7613	0,7826
Gompertco	Amžius	0,0647	33,6718		0,1350	0,6711	0,7045	0,7281
	Aukštis	0,2087	30,9075		0,1790	0,7359	0,7602	0,7942
Mitscherlicho	Amžius	0,9313	42,4589		0,1350	0,6604	0,6887	0,7078
	Aukštis	1,9178	70,3583		0,1468	0,7523	0,8046	0,8435
Bertalanfio	Amžius	0,3866	40,2436		0,1339	0,7057	0,7482	0,7804
	Aukštis	1,3937	32,2951		0,1580	0,7575	0,7834	0,8043
Richardso	Amžius	0,1033	32,9119	1,1966	0,1371	0,6720	0,6961	0,7313
	Aukštis	1,0054	31,0288	0,2509	0,1908	0,7186	0,7499	0,7718

o medyno skersmeniui modeliuoti pagal aukščio priklausomybę tinkamiausias yra Mitscherlicho dėsnis. Reikia pastebėti, kad visų nagrinėjamų modelių determinacijos koeficientas nefiksuoja tinkamumo labai didelius skirtumus.

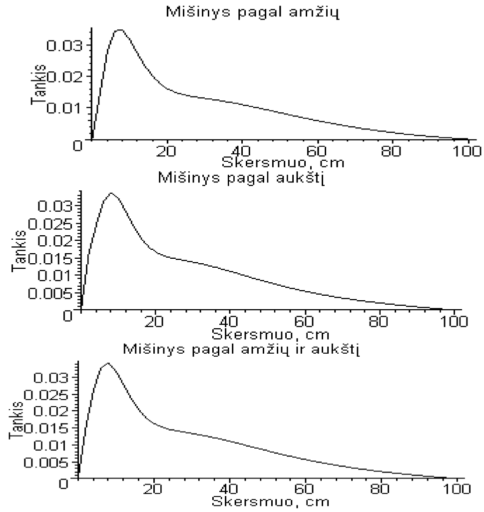
Tolimesnei stebėjimo duomenų analizei išskiriame 10 vienodo ilgio (10 metų) amžiaus klasių ir 9 vienodo ilgio (4 metrų) aukščio klases. Vadinasi, turime $m_1 = 10$, $m_2 = 9$. Pagal 1553 medžių stebėjimo duomenis, apskaičiuojame tankių funkcijų mišinių svorius ir pateikiame 4 lentelėje. Šioje lentelėje taip pat pateiktos fiksuotos amžiaus ir aukščio klasių vidurinės reikšmės. 3 pav. pateikiame tankio funkcijų mišinius pagal amžių, pagal aukštį ir bendrasis pagal amžių ir aukštį. Pastebime, kad tarp pavaizduotų trijų tankio funkcijų mišinių yra labai nežymus skirtumas.



2 pav. Skersmens tankio funkcijos skaitmeninės aproksimacijos (kairėje pusėje esant amžiui 20 metų, 40 metų, 60 metų, 80 metų, dešinėje pusėje esant aukščiui 5 m, 15 m, 25 m, 35 m) ir stacionarusis sprendinys (trūki kreivė).

4 lentelė. Amžiaus ir aukščio klasių tankio mišinių svoriai ir vidurinės reikšmės

Svoris ir klasės vidurys	Klasė									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_i	0,0000	0,4358	0,0556	0,0859	0,0872	0,0960	0,1106	0,0720	0,0404	0,0165
t_i	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
w_i	0,0764	0,3619	0,0499	0,0948	0,1074	0,1276	0,1295	0,0474	0,0051	
h_i	2	6	10	14	18	22	26	30	34	



3 pav. Skersmens tankio funkcijų mišiniai.

Literatūra

1. P. Rupšys, Logistic growth with Markovian jumping, *Vagos*, **65**(18), 133–140 (2004).
2. P. Rupšys, On parameter estimation for stochastic logistic growth laws through the maximum likelihood procedure, *Liet. matem. rink.*, **44** (spec. nr.), 759–762 (2004).
3. P. Rupšys, On parameter estimation for stochastic logistic growth laws through the maximum likelihood and L^1 norm procedures, *Lietuvos statistikos darbai*, **42**, 49–60 (2005).
4. И.И. Гихман, А.В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, Наука, Москва (1977).

SUMMARY

P. Rupšys, D. Raškinienė. Application of stochastic logistic laws and their density mixtures to the growth analysis

The processes of growth play an important role in different fields of science, such as ecology, economics, finance etc. In applications the averaged trend kinetics is represented by means of one of the types of logistic forms (Verhulst, Gompertz, Mitscherlich, Richards *et al*). The article deals with the numerical solutions of the Fokker–Plank equation.

Keywords: stochastic differential equation, density function, Fokker–Plank equation, numerical solution.