Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 523–527

Apie draudos išmokų proceso konvergavimą į sudėtinį Puasono procesą

Rimas BANYS (VGTU)
el. paštas: rimasbanys@takas.lt

Nagrinėjamas draudos išmokų stochastinis modelis, kai draudimo kompanijos klientų skaičius didėja laikui bėgant. Draudos išmokų proceso trajektorijos priklauso funkcijų be antrosios rūšies trūkių erdvei $D[0,\infty)$. Įrodomas šių procesų skirstinių konvergavimas į sudėtinio Puasono proceso skirstinį erdvėje $D[0,\infty)$ su Skorochodo topologijomis M_1 ir J_1.

Plačiai naudojamos Skorochodo J_1 topologijos svarbiausia savybė yra tai, kad kiekvieną ribinės funkcijos trūkį turi atitikti konverguojančios funkcijos trūkis, o kiekvienas trūkio taškas bei trūkio dydis turi konverguoti atitinkamai į ribinės funkcijos trūkio tašką bei dydį. Taigi trūkioji funkcija negali būti tolydžiųjų funkcijų riba. M_1 topologija yra silpnesnė už J_1, tačiau šios topologijos prasme konverguojančių funkcijų trūkiai nebūtinai turi atitikti ribinės funkcijos trūkius. Taigi konverguojančių funkcijų klasė yra gerokai platesnė. J_1 ir M_1 topologijų apibrėžimus žr. [1].

Tarkime, kad draudimo kompanijos klientų skaičius laiko momentu t yra $K_n(t)$. Čia $K_n(t)$ yra nemažėjanti determinuotoji funkcija. Pažymėkime $X_{nk}(t)$ draudiminių įvykių, po kurių k-asis klientas gauna draudos išmokas, srautą. Laikysime, kad $X_{nk}(t)=0$, kai $t\leqslant t_{nk}$, čia $t_{nk}=\inf\{t\colon\ K_n(t)\geqslant k\}$. Įvykus šio srauto i-ajam įvykiui, draudos išmoka yra $\xi_{nk}^{(i)}$. Kompanijos visų draudos išmokų iki laiko momento t (imtinai) suma yra

$$Z_n(t)=\sum_{k=1}^{K_n(t)}\sum_{i=1}^{X_{nk}(t)}\xi_{nk}^{(i)}.$$

Tarkime, kad $\lim_{n\to\infty}P\{\xi_{nk}^{(1)}=m\}=p_m$, $m\geqslant 1$, o atsitiktiniai procesai $X_{nk}(t)$ atitinka šias sąlygas: su kiekvienu $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant K_n(t)}P\bigl\{X_{nk}(t)>0\bigr\}=0 \tag{1}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{K_n(t)}P\bigl\{X_{nk}(t)>1\bigr\}=0. \tag{2}$$

Pažymėkime

$$\Lambda_n(t) = \sum_{k=1}^{K_n(t)} P\{X_{nk}(t) > 0\}.$$

Tirsime sąlygas, su kuriomis išmokų procesai $Z_n(t)$ konverguoja į sudėtinį Puasono procesą.

Nepriklausomų pokyčių atsitiktinį procesą $Z(t)$ vadinsime sudėtiniu Puasono procesu, jei $Z(0) = 0$, kiekviename pusintervalyje $\Delta = (a, b]$ $(0 \leqslant a < b)$ proceso pokyčiai $Z(\Delta) = Z(b) - Z(a)$ įgyja tik sveikas neneigiamas reikšmes ir

$$E \exp\{iuZ(\Delta)\} = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m(\Delta)(\mathrm{e}^{ium} - 1)\right\}, \tag{3}$$

čia λ_m su kiekvienu m yra matas ir $\sum_{m=1}^{\infty} m\lambda_m(\Delta) < \infty$. Jeigu visi $\lambda_m \equiv 0$, kai $m = 2, 3, \ldots$, tai $Z(t)$ yra Puasono procesas.

Atsitiktinių procesų $Z_n(t)$ ir $Z(t)$ realizacijos priklauso funkcijų be antrosios rūšies trūkių erdvei $D = D[0, \infty)$. Nagrinėsime procesų $Z_n(t)$ skirstinių funkcijų erdvėje D su Skorochodo topologijomis J_1 ir M_1 (žr. [1]) silpnąjį konvergavimą, kurį žymėsime atitinkamai simboliais $\xrightarrow{d, J_1}$ ir $\xrightarrow{d, M_1}$.

Tarkime, kad $\Lambda(t)$ yra nemažėjanti tolydi iš dešinės funkcija, apibrėžta pusintervalyje $[0, \infty)$ ir tenkinanti sąlygą $\Lambda(0) = 0$. Apibrėžkime funkcijas λ_m lygybėmis $\lambda_m(t) = p_m \Lambda(t)$, $m = 1, 2, \ldots$. Pažymėkime $Z_\Lambda(t)$ sudėtinį Puasono procesą, apibrėžtą (3), kai λ_m yra Lebego–Styltjeso matai, atitinkantys funkcijas $\lambda_m(\cdot)$, $m = 1, 2, \ldots$.

1 TEOREMA. *$Z_n \xrightarrow{d, M_1} Z_\Lambda$ tada ir tik tada, kai $\Lambda_n \xrightarrow{M_1} \Lambda$.*

Įrodymas. Imkime kokį nors funkcijos $\Lambda(t)$ tolydumo taškų rinkinį $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_d\}$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_d$, ir pažymėkime $\Delta_r = (t_{r-1}, t_r]$, $r = 1, \ldots, d$. Toliau žymėsime:

$$Z_{nk}(t) = \sum_{i=1}^{X_{nk}(t)} \xi_{nk}^{(i)},$$

$$Z_{nk}(\Delta_r) = Z_{nk}(t_r) - Z_{nk}(t_{r-1}), \quad r = 1, \ldots, d,$$

$$\mathbf{Z}_{nk}(\mathbf{T}) = \big(Z_{nk}(\Delta_1), \ldots, Z_{nk}(\Delta_d)\big),$$

$$\mathbf{Z}_n(\mathbf{T}) = \big(Z_n(\Delta_1), \ldots, Z_n(\Delta_d)\big),$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{T}) = \big(Z(\Delta_1), \ldots, Z(\Delta_d)\big).$$

Kadangi atsitiktinių procesų Z_n ir Z trajektorijos, kaip ir funkcijos Λ_n ir Λ, yra nemažėjančios, tai konvergavimas $Z_n \xrightarrow{d, M_1} Z_\Lambda$ yra ekvivalentus atsitiktinių vektorių $\mathbf{Z}_n(\mathbf{T})$ skirstinių silpnajam konvergavimui į $\mathbf{Z}(\mathbf{T})$ skirstinius su kiekvienu funkcijos

Λ tolydumo taškų rinkiniu T, o konvergavimas $\Lambda_n \xrightarrow{M_1} \Lambda$ ekvivalentus konvergavimui funkcijos Λ tolydumo taškuose. Todėl teoremos sąlygos būtinumas išplaukia iš nykstamųjų atsitiktinių dydžių sumavimo teorijos [2].

Norėdami įrodyti pakankamumą, pažymėkime

$$\varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{T}) = E \exp\bigl\{i \langle \mathbf{u}, \mathbf{Z}_n(\mathbf{T})\rangle\bigr\},$$

čia $\mathbf{u} \in R^d$ yra d-matis vektorius $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d)$, o $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{r=1}^d u_r v_r$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^d)$. Pakanka įsitikinti, kad

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{T}) = \prod_{r=1}^d \exp\left\{\sum_{m=1}^\infty \lambda_m(\Delta_r)(\mathrm{e}^{iu_r m} - 1)\right\}.$$

Pažymėję $\varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) = E \exp\{i \langle \mathbf{u}, \mathbf{Z}_{nk}(\mathbf{T})\rangle\}$, parašysime

$$\log \varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{T}) = \sum_{k=1}^{K_n(t_d)} \log \varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}).$$

Kadangi

$$\varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) - 1 = \sum_{s\in R^d} \bigl(\mathrm{e}^{i\langle \mathbf{u},\mathbf{s}\rangle} - 1\bigr) P\bigl\{\mathbf{Z}_{nk}(\mathbf{T}) = \mathbf{s}\bigr\} = \sum_{s\neq 0} \bigl(\mathrm{e}^{i\langle \mathbf{u},\mathbf{s}\rangle} - 1\bigr) P\bigl\{\mathbf{Z}_{nk}(\mathbf{T}) = \mathbf{s}\bigr\},$$

tai

$$\bigl|\varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) - 1\bigr| \leqslant 2P\bigl\{X_{nk}(t_d) > 0\bigr\}.$$

Todėl iš (1) išplaukia, kad $|\varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) - 1| < \frac{1}{2}$, $k = 1, \ldots, K_n(t_d)$, kai n pakankamai dideli. Tuomet

$$\log \varphi_n(\mathbf{u}, \mathbf{T}) = \sum_{k=1}^{K_n(t_d)} \bigl(\varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) - 1\bigr) + R_n,$$

čia

$$\begin{aligned}|R_n| &\leqslant \sum_{k=1}^{K_n(t_d)} \sum_{m=2}^\infty \frac{1}{2}\bigl|\varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) - 1\bigr|^m \leqslant \sum_{k=1}^{K_n(t_d)} \bigl|\varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) - 1\bigr|^2 \\ &\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant K_n(t_d)} P\bigl\{X_{nk}(t_d) > 0\bigr\} \sum_{k=1}^{K_n(t_d)} P\bigl\{X_{nk}(t_d) > 0\bigr\} \to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

Vadinasi, turime įsitikinti, kad

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{K_n(t_d)} \bigl(\varphi_{nk}(\mathbf{u}, \mathbf{T}) - 1\bigr) = \sum_{r=1}^d \sum_{m=1}^\infty \lambda_m(\Delta_r)(\mathrm{e}^{iu_r m} - 1). \tag{4}$$

Pažymėję $\mathbf{e}_r$ vektorių, kurio r-oji koordinatė yra 1, o visos kitos lygios nuliui, parašykime

$$\begin{aligned}\varphi_{nk}(\mathbf{u},\mathbf{T})-1&=\sum_{r=1}^{d}\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{iu_r m}-1)P\big\{\mathbf{Z}_{nk}(\mathbf{T})=m\mathbf{e}_r\big\}\\&\quad+\sum_{\mathbf{s}\neq m\mathbf{e}_r}(\mathrm{e}^{i\langle\mathbf{u},\mathbf{s}\rangle}-1)P\big\{\mathbf{Z}_{nk}(\mathbf{T})=\mathbf{s}\big\}\\&=\sum_{r=1}^{d}\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{iu_r m}-1)P\big\{Z_{nk}(\Delta_r)=m\big\}+\mathrm{O}\big(P\{X_{nk}(t_d)>1\}\big)\\&=\sum_{r=1}^{d}\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{iu_r m}-1)P\big\{X_{nk}(\Delta_r)=1,\ \xi_{nk}^{(1)}=m\big\}+\mathrm{O}\big(P\{X_{nk}(t_d)>1\}\big).\end{aligned}$$

Iš čia matome, kad esant išpildytai teoremos sąlygai, (4) lygybė yra teisinga.

Teorema įrodyta.

Kai visi $\xi_{nk}^{(1)}=1$, lengvai gauname šį teiginį.

2 TEOREMA. *Nepriklausomų taškinių procesų $X_{nk}(t)$, tenkinančių* (1) *sąlygą, sumų $X_n(t)$ daugiamačiai skirstiniai silpnai konverguoja į Puasono proceso su vidurkiu $\Lambda(t)$ daugiamačius skirstinius tada ir tik tada, kai teisinga* (2) *lygybė ir su kiekvienu $t>0$ teisinga lygybė* $\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(t)=\Lambda(t)$.

Ši teorema yra Grigelionio teoremos [3] analogas tuo atveju, kai dėmenų skaičius kinta laikui bėgant. Kitaip sakant, kai $K_n(t)\equiv k_n$, ji virsta Grigelionio teorema.

Panagrinėkime išmokų procesą tuo atveju, kai $K_n(t)=[nt]$ (čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį, o laiko trukmė $\tau_k^{(n)}$, apsidraudus k-ajam klientui, iki pirmojo su juo susijusio draudiminio įvykio turi skirstinį

$$P\{\tau_k^{(n)}\leqslant s\}=1-\exp\Big\{-\frac{\lambda}{n}s\Big\}.$$

Šiuo atveju

$$P\{X_{nk}(t)\}>0=P\{\tau_k^{(n)}\leqslant t-t_{nk}\}=\frac{\lambda}{n}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

todėl

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{K_n(t)}P\big\{X_{nk}(t)>0\big\}=\frac{1}{2}\lambda t^2.$$

Taigi visų draudiminių įvykių srautas $X_n(t)$ konverguoja į Puasono procesą su vidurkiu $\frac{1}{2}\lambda t^2$.

3 TEOREMA. $Z_n\xrightarrow{d,J_1}Z_\Lambda$ *tada ir tik tada, kai* $\Lambda_n\xrightarrow{d,J_1}\Lambda$.

Įrodymas. Akivaizdu, kad atsitiktinių procesų Z_n skirstinių seka yra reliatyviai kompaktiška topologinėje erdvėje (D, J_1) tada ir tik tada, kai procesų X_n skirstinių seka yra reliatyviai kompaktiška. Todėl įrodymas išplaukia iš taškinių procesų sumų konvergavimo į Puasono procesą erdvėje (D, J_1) sąlygų (žr. [4]).

Išnagrinėtojo pavyzdžio draudiminių įvykių srauto $X_n(t)$ daugiamačiai skirstiniai silpnai konverguoja į Puasono proceso X su vidurkiu $\frac{1}{2}\lambda t^2$ daugiamačius skirstinius. Kadangi ribinio Puasono proceso vidurkis yra tolydi laiko t funkcija, tai X_n ir Z_n skirstiniai topologinėje erdvėje (D, J_1) taip pat konverguoja į X ir Z_Λ skirstinius.

Suformuluotųjų teoremų sąlygos atrodo natūralios, modeliuojant realios draudimo kompanijos išmokų srautą, todėl modeliuojant kompanijos veiklą galima laikyti, kad išmokų srautas yra artimas sudėtiniam Puasono procesui. Šio proceso parametrai priklauso nuo kompanijos klientų skaičiaus kitimą nusakančios funkcijos.

Literatūra

1. W. Whitt, *Stochastic-Process Limits*: *An Introduction to Stochastic-Process Limits and their Applications to Queues*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg (2002).
2. B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, revised edition, Addison Wesley, Reading, MA, Gostechizdat, M–L (1949).
3. B. Grigelionis, To the question on convergence of the sums of the random step processes to a Poisson process, *Liet. matem. rink.*, **6**(2), 241–244 (1966).
4. R. Banys, On the weak convergence of sums of independent point processes to the Poisson processes, *Liet. matem. rink.*, **17**(1), 19–25 (1977).

SUMMARY

R. Banys. On convergence of the accumulated insurance claim processes to the compound Poisson process

Convergence of the accumulated insurance claim processes is investigated when the number of clients of insurance company depeds on time. Conditions for convergence to the compound Poisson process in the function space $D[0, \infty)$ endowed with the Skorohod M_1 and J_1 topologies are obtained.

Keywords: functional limit theorems, compound Poisson process.