Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2005, 539–541

Koši skirstinio charakterizacijos stabilumas

Romanas JANUŠKEVIČIUS, Stasė BALIUKONYTĖ (VPU)
el. paštas: algebra@vpu.lt

Naudosime žymėjimą $\mathbf{L}(X) = \mathbf{L}(Y)$, jei norėsime pabrėžti, kad atsitiktinių dydžių X ir Y skirstiniai sutampa.

Yra žinoma, kad jei $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirtę atsitiktiniai dydžiai, turintys Koši skirstinį, tai monomo X_1 ir empirinio vidurkio $\overline{X} = \overline{X}(n) = (X_1 + ... + X_n)/n$ skirstiniai sutampa, t.y.

$$\mathbf{L}(X_1) = \mathbf{L}\big(\overline{X}(n)\big). \tag{1}$$

Ar teisingas atvirkščias teiginys? P. Lévy jau atveju $n = 2$ įrodė, kad be papildomų sąlygų atsakymas negali būti teigiamas. Šios papildomos sąlygos išnagrinėtos darbe [1].

1 TEOREMA (B. Ramachandran, C.R. Rao [1]). *Tarkime, kad $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi neišsigimę vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Jei sąryšis* (1) *yra teisingas bent dviems n reikšmėms $n = n_1$ ir $n = n_2$ tokioms, kad santykis* $\log n_1/\log n_2$ *yra iracionalusis skaičius, tai X_i turi Koši skirstinį.*

Kitas 1 teoremos įrodymas pateiktas R. Januškevičiaus darbe [2].

Dabar išnagrinėsime šios teoremos stabilumą metrikoje λ. Priminsime šios metrikos apibrėžimą:

$$\lambda(X, Y) = \min_{T>0} \max \left\{ \frac{1}{2} \max_{|t|\leqslant T} \big|\mathbf{E}\exp(itX) - \mathbf{E}\exp(itY)\big|, \frac{1}{T} \right\}.$$

λ metrika yra ekvivalenti Lévy metrikai ta prasme, kad iš atsitiktinių dydžių sekos konvergavimo λ metrikoje seka šios atsitiktinių dydžių sekos konvergavimas Lévy metrikoje, ir atvirkščiai. Taigi, tarkime dabar, kad 1 teoremos sąlygos išpildytos tik apytiksliai, su tam tikra paklaida, o šią paklaidą galima išmatuoti λ metrikoje.

2 TEOREMA. *Tarkime, kad $X_1, ..., X_{n_1}, ..., X_{n_2}$ yra nepriklausomi neišsigimę vienodai pasiskirstę simetriniai atsitiktiniai dydžiai, o $\theta = \log n_1/\log n_2 \quad (2 \leqslant n_1 < n_2)$ yra iracionalus. Jei sąlyga*

$$\lambda(X_1, \overline{X}(n)) \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

yra tenkinama bent dviem n reikšmėms $n = n_1$ ir $n = n_2$, tai egzistuoja atsitiktinis dydis Z, turintis Koši skirstinį, ir konstantos $\delta > 0$ ir $C > 0$ tokie, kad

$$\lambda(X_i, Z) \leqslant C\varepsilon^{\delta}, \quad i = 1, ..., n_1, ..., n_2. \tag{3}$$

Įrodymas. Atsitiktinio dydžio X_i charakteristinę funkciją pažymėkime $f(t)$. Iš pradžių nagrinėsime intervalą $-1 \leqslant t \leqslant 1$ ir tarsime, kad

$$|f(t)| \geqslant 1/2 \quad \forall t \in [-1, 1]. \tag{4}$$

Iš (2) gauname, kad

$$\left|f(t) - f^{n_i}(t/n_i)\right| \leqslant \varepsilon, \quad |t| \leqslant 1. \tag{5}$$

Pažymėkime dabar

$$u = \log t, \quad D(\log t) = \log f(t). \tag{6}$$

Tada (5) srityje $0 < t \leqslant 1$ galima perrašyti taip:

$$D(u) = n_i D(u + \theta_i) + r_i(e^u), \tag{7}$$

kur $u \leqslant 0$,

$$\begin{aligned} r_i(t) &= \log\left(1 + \frac{r(t)}{f^{n_i}(t/n_i)}\right), \\ r(t) &= f(t) - f^{n_i}(t/n_i), \\ \theta_i &= -\log n_i. \end{aligned}$$

Pastebėsime, kad nelygybę (3) pakanka įrodyti visiems $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, kur ε_0 – pakankamai mažas teigiamas skaičius. Iš tiesų, jei $\varepsilon > \varepsilon_0$, tai (3) yra triviali, jei C parinkti taip, kad

$$C\varepsilon_0^{\delta} = 1, \quad \text{t.y.} \quad C = \varepsilon_0^{-\delta},$$

nes visada $\lambda(X_i, Z) \leqslant 1$.

Sąlygos (4) pagrindu nesunku įsitikinti, kad jei $\varepsilon \leqslant 2^{-2-n_i}$, tai

$$\left|r_i(t)\right| \leqslant \frac{2|r(t)|}{|f^{n_i}(t/n_i)|} \leqslant 2^{n_i+1}\varepsilon. \tag{8}$$

Įveskime dar vieną naudingą pažymėjimą:

$$\varphi(u) = D(u)\exp(-u). \tag{9}$$

Iš (7) ir (9) pastebėsime, kad $\forall u \leqslant 0$

$$\varphi(u) = \varphi(u + \theta_i) + r_i(e^u)e^{-u}, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Analogiškai sąryšiams (21)–(34) iš R.Januškevičiaus ir O.Januškevičienės straipsnio [3] iš (10) ir (8) gauname, kad

$$\left|\varphi(u) - \varphi(\theta_1)\right| \leqslant C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^{\delta}, \quad \forall u \leqslant 0, \tag{11}$$

kur C_1, C_2 yra teigiamos konstantos.

Prisiminę pažymėjimus (6) ir (9), įvertį (11) perrašome taip:

$$\left|\log f(t) - tn_1 \log f\Big(\frac{1}{n_1}\Big)\right| \leqslant C_1 t\varepsilon + C_2 t\varepsilon^{\delta}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{12}$$

Tarkime dabar, kad $-1 \leqslant t < 0$. Pažymėję $t = -z, \quad 0 < z \leqslant 1$, iš (12) gauname, kad

$$\log f(z) = Az + R(z), \quad 0 < z \leqslant 1,$$

kur

$$|R(z)| \leqslant C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^{\delta}, \quad A = n_1 \log f\Big(\frac{1}{n_1}\Big). \tag{13}$$

Pastebėsime, kad

$$f(t) = f(-z) = \overline{f(z)} = \exp(\overline{A}z)\exp\overline{R(z)}. \tag{14}$$

Kadangi nagrinėjami atsitiktiniai dydžiai yra simetriniai, tai charakteristinė funkcija $f(t)$ yra reali. Todėl iš (4) turime, kad

$$f(t) \geqslant 1/2, \quad \forall t \in [-1, 1]. \tag{15}$$

Iš (15) gauname, kad $A = \overline{A} = -|A|$. Pasinaudoję sąryšiais (12), (13) ir (14) darome išvadą, kad

$$f(t) = \exp\big\{-|A||t|\big\}\exp\big\{R_*(t)\big\}, \tag{16}$$

$$\big|R_*(t)\big| \leqslant C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^{\delta}, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1. \tag{17}$$

Sąryšių (16) ir (17) ištęsimas į platesnę kintamojo t apibrėžimo sritį $[-1/\varepsilon, 1/\varepsilon]$ ir atsisakymas nuo sąlygos (4) atliekami analogiškai sąryšiams (8)–(16) iš R. Januškevičiaus ir O. Januškevičienės straipsnio [4].

Teorema įrodyta.

References

1. B. Ramachandran, C.R. Rao, Solutions of functional equations arising in some regression problems and a characterizaton of the Cauchy law, *Sankhyā*, ser. A, **32**(1), 1–30 (1970).
2. R. Januškevičius, Apie Koši skirstinio charakterizaciją empirinio vidurkio savybėmis, *Liet. matem. rink.*, **44** (spec. nr.), 804–807 (2004).
3. R. Yanushkevichius, O. Yanushkevichiene, Stability of P. Lévy's characterization theorem, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **70**, 457–472 (1985).
4. R. Yanushkevichius, O. Yanushkevichiene, On the stability of one characterization of stable distributions, *Acta Applicandae Mathematicae*, **79**, 137–142 (2003).

SUMMARY

R. Januškevičius, S. Baliukonytė. On stability of the characterization of the Cauchy law

The assumption that two linear statistics are identically distributed can be used to characterize various populations. According to B. Ramachandran and C.R. Rao theorem, if under the additional conditions the two sample means $(X_1, ..., X_{n_1})/n_1$ and $(X_1, ..., X_{n_2})/n_2$ have the same distribution as the monomial X_1 then this monomial has a Cauchy law. The stability estimation in this theorem is investigated in our paper.

Keywords: Cauchy law, identically distributed statistics, characterization theorems, stability theorems.