Liet. matem. rink, **45***, spec. nr.*, 2005, 557–561

Распознавание сигналов с различными корреляционными матрицами при помощи квантовой логики

Григорий МЕЛЬНИЧЕНКО (VPU)
e-mail: grimel@vpu.lt

1. Введение

Пусть μ – вероятностная мера случайного сигнала, а его реализации x принадлежат конечномерному гильбертову пространству H. Определим корреляционный оператор меры μ:

$$\langle Ky, z\rangle = \int_H \langle y, x\rangle\langle z, x\rangle\, \mu(\mathrm{d}x).$$

Если наблюдаемый сигнала x рассматривать как точку гильбертова пространства H, то обычно используется аффинная структура пространства H. Любая случайная величина $\xi(x)$ измеряет некоторый признак наблюдаемого сигнала.

Если наблюдаемый сигнала x рассматривать как вектор гильбертова пространства H, то, используя векторную структуру пространства H, можно интерпретировать $||x||^2$ как некоторую физическую величину: энергию, мощность, интенсивность. Примем в качестве этой величины энергию. Норма наблюдаемого сигнала $||x||$ – мера отклонения сигнала от нулевого вектора, а на это природой тратится некоторая энергия. Из неравенства Чебышева для любых распределений с корреляционным оператором K имеем

$$\mu\big(||x|| \geqslant \delta\big) \leqslant \int_H ||x||^2 \mu(\mathrm{d}x)/\delta^2 = \mathrm{tr}\, K/\delta^2.$$

Пусть по аналогии с квантовой теорией измеряемые признаки сигнала x – только квадратичные формы $\xi(x) =< Ax, x >$, где A – линейный оператор. В предлагаемом подходе формула

$$\int_H < Ax, x > \mu(\mathrm{d}x) = \mathrm{tr}\, AK = \mathrm{tr}\, KA \tag{1}$$

является основной. Если P – ортопроектор, то из формулы (1) получаем распределение энергии в среднем на ортопроекторах:

$$\int_H < Px, x > \mu(\mathrm{d}x) = \int_H ||Px||^2 \mu(\mathrm{d}x) = \operatorname{tr} PK = \operatorname{tr} KP.$$

2. Квантовая логика

Высказываниями квантовой логики являются линейные подпространства $M \subset H$. Если каждому подпространству сопоставить ортопроектор P_M на него, то высказывания квантовой логики можно отождествить с множеством ортопроекторов.

В радиотехнике, технике связи ортопроектором P может быть широкополосный фильтр, который пропускает сигналы $x \in M$ и не пропускает сигналы $x \in M^{\perp}$. В акустике ортопроектором P может быть приемник акустических волн, содержащий резонаторы, возбуждающиеся на определенные моды [3], [4].

Определим на множестве ортопроекторов отношение порядка: $P_1 \leqslant P_2$, если $\langle P_1 x, x\rangle \leqslant \langle P_2 x, x\rangle$ $(||P_1 x|| \leqslant ||P_2 x||)$ для всех $x \in H$. Относительно операций $P_1 \wedge P_2 = \inf(P_1, P_2)$, $P_1 \vee P_2 = \sup(P_1, P_2)$ и $P^{\perp} = I - P$ множество ортопроекторов – квантовая логика.

3. Распознавания двух классов сигналов

Применим квантовую логику для распознавания двух классов случайных сигналов (в квантовой теории этот случай рассмотрел Хелстром [1], а случай многих классов – Холево [2]).

Пусть наблюдаемый сигнал x принадлежит одному из двух классов сигналов D_1, D_2, μ_1, μ_2 – их вероятностные меры, а K_1, K_2 – корреляционные операторы этих мер. Сопоставим каждому классу D_i линейные ортогональные подпространства L_i, и пусть им соответствуют ортогональные проекторы P_i, тогда, значит, $P_1 + P_2 = I$ пропускают любой сигнал. Если $P_1 x = x$, то $x \in L_1$, а если $P_2 x = x$, то $x \in L_2$. В противном случае наблюдаемый сигнал x является суммой двух сигналов: $x = P_1 x + P_2 x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, а $x_2 \in L_2$.

Если сигнал $x \in D_i$, то проектор P_j, выделит из наблюдаемого сигнала x его часть $x_i = P_i x$ и, значит, пропустит энергию $||P_i x||^2 = \langle P_i x, x\rangle$. Энергия в среднем, пропускаемая проектором P_i при условии, что сигналы принадлежат классу D_j, равна

$$r_i(j) = \int_H ||P_i x||^2 \mu_j(\mathrm{d}x) = \int_H \langle P_i x, x\rangle \mu_j(\mathrm{d}x) = \operatorname{tr}(P_i K_j).$$

Так как проектор P_i сопоставлен классу D_i, тогда при наблюдении он может пропускать энергию сигналов своего класса, так и чужого. Поэтому назовем энергию $r_i(j)$, $i = j$ „правильной“ энергией, а энергию $r_i(j), i \neq j$, – „ложной“. Если p_1, p_2 – априорные вероятности классов, то математическое ожидание „правильной“ энергии пропускаемой ортогональными проекторами P_1, P_2 равно

$$\begin{aligned}\mathrm{Energ}\,(P_1, P_2) &= p_1 \int_H \langle P_1 x, x\rangle \mu_1(\mathrm{d}x) + p_2 \int_H \langle P_2 x, x\rangle \mu_2(\mathrm{d}x)\\ &= p_1 \mathrm{tr}\,(P_1 K_1) + p_2 \mathrm{tr}\,(P_2 K_2).\end{aligned}$$

Будем искать проекторы P_1, P_2 так, чтобы величина $\mathrm{Energ}\,(P_1, P_2)$ была бы наибольшей. Для этого представим $\mathrm{Energ}\,(P_1, P_2)$ в виде

$$\mathrm{Energ}\,(P_1, P_2) = p_1 \mathrm{tr}\,(K_1) + p_2 \mathrm{tr}\,(P_2 K_2) - p_1 \mathrm{tr}\,(P_2 K_1).$$

Здесь первое число фиксировано, а разность зависит только от проектора P_2. Поэтому ищем P_2 так, чтобы эта разность была бы наибольшей. Пусть λ_i, $i = 1 \ldots n$ – собственные значения оператора $p_2 K_2 - p_1 K_1$, а y_i, $i = 1 \ldots n$ – его собственные вектора. Имеем

$$\begin{aligned}p_2 \mathrm{tr}\,(P_2 K_2) - p_1 \mathrm{tr}\,(P_2 K_2) &= \sum_{i=1}^{n} \big\langle P_2 (p_2 K_2 - p_1 K_1) y_i, y_i \big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ||P_2 y_i||^2\\ &= \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i ||P_2 y_i||^2 + \sum_{\lambda_i \leqslant 0} \lambda_i ||P_2 y_i||^2 = d_1 + d_2,\end{aligned}$$

где независимо от проектора P_2: $||P_2 y_i||^2 \leqslant ||y_i||^2$, $d_1 > 0$, $d_2 \leqslant 0$. Пусть P_2 – проектор на подпространство, порожденное собственными векторами с положительными собственными значениями. При таком выборе проектора P_2 число $d_2 = 0$, а $||P_2 y_i||^2 = ||y_i||^2$, т.е. число d_1 будет наибольшим. Поэтому проектор P_2 будет искомым, а $P_1 = I - P_2$.

4. Правило распознавания

Подпространств L_1, L_2 ортогональны, поэтому имеют только одну общую точку O. Однако распознаваемые классы сигналов D_1, D_2 могут значительно пересекаться, например, если их вероятностные меры μ_1, μ_2 – гауссовы.

Тогда в зависимости от выделяемой энергии из наблюдаемого сигнала проекторами P_1, P_2 пространство наблюдений сигналов необходимо разбивать на области (использовать классическую логику), принимая различные правила распознавания.

Можно принять правило распознавания по максимуму энергии: $x \in D_1$, если $P_1 x = x$, и $x \in D_2$, если $P_2 x = x$. Если $x = P_1 x + P_2 x$, то сигнал одновременно принадлежит двум классам, но с разной энергией „правдоподобия“ – $\langle P_i x, x\rangle = ||P_i x||^2$. Тогда $x \in D_1$, если $\langle P_1 x, x\rangle \geqslant \langle P_2 x, x\rangle$, и $x \in D_2$, если $\langle P_1 x, x\rangle < \langle P_2 x, x\rangle$.

Пусть μ_1, μ_2 – непрерывные меры. Определим множество $G = \{x\colon \langle P_1 x, x\rangle \geqslant \langle P_2 x, x\rangle\}$ и пусть G^c – его теоретико-множественное дополнение.

Если энергию принадлежности сигнала классу учитывать только один раз, выбирая наибольшее значение, тогда

$$
\begin{aligned}
&p_1 \int_G \langle P_1 x, x\rangle \mu_{K_1}(\mathrm{d}x) + p_2 \int_{G^c} \langle P_2 x, x\rangle \mu_{K_2}(\mathrm{d}x) \\
&\quad \leqslant p_1 \int_H \langle P_1 x, x\rangle \mu_{K_1}(\mathrm{d}x) + p_2 \int_H \langle P_2 x, x\rangle \mu_{K_2}(\mathrm{d}x) = \operatorname{Energ}(P_1, P_2).
\end{aligned}
$$

Поэтому при применении правила распознавания по максимуму энергии наибольшее значение энергии правильного распознавания будет не больше $\operatorname{Energ}(P_1, P_2)$.

Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое число, то можно принять такое правило распознавания: $x \in D_1$, если $\langle P_2 x, x\rangle < \varepsilon$ проектор P_2 практически не пропускает энергию сигнал), и $\langle P_1 x, x\rangle \geqslant \varepsilon$ (основную энергию наблюдаемого сигнала пропускает проектор P_1), и $x \in D_2$, если все наоборот. Если $\langle P_2 x, x\rangle \geqslant \varepsilon$ и $\langle P_2 x, x\rangle \geqslant \varepsilon$, то отказываемся от распознавания, а если $\langle P_2 x, x\rangle < \varepsilon$ и $\langle P_2 x, x\rangle < \varepsilon$, то считаем, что наблюдается „слабый“ шум.

При использовании классической логики максимизируют вероятность правильного распознавания, сопоставляя каждому классу D_i подмножество $L_i \subset H$, где $L_1 \cup L_2 = H$. Если $1_{L_i}(x)$ – индикаторные функции L_i (аналоги проекторов), то их значения от наблюдаемого сигнала однозначно относят его к определенному классу, что может не быть при использовании квантовой логики.

5. Замечания

Использование квантовой логики для распознавания сигналов рассматривается в [3], [4]. Мы используем формулу (1), которая делает этот метод распознавания более ясным.

Заметим, что, учитывая (1), оператор плотности фон Неймана [5] квантовой теории совпадает с корреляционным оператором меры μ.

Использование подпространств для распознавания сигналов предлагалось и раньше. Например, Ватанабе и др. [6] предложили метод CLAFIC с правилом распознавания по максимуму энергии, где в качестве подпространств L_i используются подпространства, натянутые на первые l_i главных компонент соответствующих ковариационных матриц классов. Недостатки CLAFIC: подпространства L_i могут иметь общие ненулевые подпространства; не используются априорные вероятности классов, хотя они могут быть известны.

Литература

1. К. Хелстром, *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания*, Мир, Москва (1979).
2. A.S. Holevo, Statistical decision theory for quantum theory, *J. Multivariate Anal.*, **3**, 337–394 (1973).
3. В.П. Белавкин, В.П. Маслов, *Математические аспекты распознавания звуковых и визуальных образов*, МИЭМ, Москва (1987).

4. V.P. Belavkin, V.P. Maslov, *Design of Optimal Dynamic Analyzers*, *Mathematical Aspects of Wave Pattern Recognition* (1988).
`http://arxiv.org/abs/quant-ph/0412031`
5. фон И. Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, Москва (1964).
6. S. Watanabe, P.F. Lambert, C.A. Kulikowski, J.L. Buxton, R. Walker, Evaluation and selection of variables in pattern recognition, in: J. Tou (Ed.), *Computer and Information Sciences II*, Academic Press, New York (1967).

REZIUMĖ

G. Melničenko. Signalų atpažinimas su skirtingomis koreliacinėmis matricomis taikant kvantinę logiką

Parodyta, kad kvantine logika galima taikinti signalų atpažinimui su skirtingomis koreliacinėmis matricomis. Atpažinimo taisyklėje yra naudojama priimto signalo energija.

SUMMARY

G. Melnichenko. Recognition of signals with different correlation matrixes with quantum logic

It is shown that the quantum logic can be used for recognition of random signals with different correlation operators. Rules of recognition use energy of the accepted signal.

Keywords: quantum logic, recognition of random signals, maximizing the energy of correct recognition, projection, quantum detection.