Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
63 tomas, 2022, 28–37
https://doi.org/10.15388/LMR.2022.29756

Penktos klasės matematikos olimpiadų užduočių sprendimo rezultatų statistinis palyginimas

Karolina Kanišauskienė

Šiaulių akademija, Vilniaus universitetas
Vytauto g. 84, LT-76352 Šiauliai, Lietuva
El. paštas: kanisauskiene.k@gmail.com

Įteiktas 2022 birželio 28; publikuotas 2022 gruodžio 10

Santrauka. Straipsnyje pateikiama lyginamoji 2016–2019 m. Šiaulių m. (II-ojo etapo) 5-os klasės mokinių matematikos olimpiadų užduočių sprendimo rezultatų analizė. Siekiama išsiaiškinti, ar į skirtingų metų olimpiadas atrenkami mokiniai yra panašaus gabumo, įsitikinti, kad užduočių sunkumas ne visada atspindi jų diagnostinį informatyvumą, ir pamėginti suskirstyti į klasterius mokyklas pagal olimpiadose dalyvavusius mokinius bei jų rezultatus.

Raktiniai žodžiai: klasteriai; matematikos olimpiada; statistinė analizė

AMS: 62P99, 97D99

Įvadas

Kiekvienai apie savo ateitį mąstančiai visuomenei yra svarbu atskleisti gabaus vaiko potencialą ir jį tinkamai ugdyti, nes suaugę tokie vaikai tampa mokslinės, kultūrinės, ekonominės arba politinės srities profesionalais, galinčiais daryti ženklią įtaką atitinkamos srities plėtrai [8] bei ekonominiam šalies klestėjimui.

Kad atsiskleistų ir vystytųsi gabaus vaiko potencialūs sugebėjimai, jam reikalingas stimulas – tam tikra veikla savirealizacijai pasiekti. Viena iš galimų gabių, taip pat ir matematikai, vaikų ugdymo formų – olimpiados, nes jos reikalauja įvairių matematinių gebėjimų ir yra puiki gabaus mokinio savirealizacijos forma.

Kaip teigiama „Mokinių dalykinių olimpiadų, konkursų ir kitų renginių nuostatuose“ (žr. [7]), tokių renginių, t. y. ir matematikos olimpiadų, vienas iš tikslų – sukurti sąlygas aukštą motyvaciją turinčių mokinių gabumams ir kūrybiškumui atsiskleisti.

Olimpiados metu mokinys, siekiantis aukštų rezultatų, turi pademonstruoti ne tik savo intelektualinius sugebėjimus (gilias ir plačias matematines žinias bei gebėjimą praktiškai ir kūrybiškai jas pritaikyti), bet ir pakankamą fizinį bei psichologinį pasirengimą, kad galėtų fiziškai ištverti tiek laiko, kiek jo skirta olimpiados užduočių sprendimui arba kiek jo reikia atlikti visas užduotis, ir psichologiškai nepasimestų, jei kuri nors olimpiados užduotis iš pradžių atrodo neįveikiama. Pastaruosius aspektus geriau išnagrinėti galėtų psichologai ir kiti specialistai.

Nagrinėjant matematikos olimpiadų bei konkursų užduotis ir rezultatus didžiausias dėmesys kreipiamas į užduočių tinkamumą (pvz., [11]), bet retai lyginami olimpiadų skirtingų metų rezultatai.

Šio tyrimo tikslas – atlikti lyginamąją ketverių metų 5-os klasės matematikos olimpiadų užduočių sprendimo rezultatų analizę.

Šiaulių m. (II-jo etapo) 5–8 klasių mokinių matematikos olimpiada iki 2019 m.[2] buvo organizuojama kasmet kovo–balandžio mėn. Užduotis 5-os klasės mokiniams rengė tuometinio Šiaulių universiteto (dabar – VU Šiaulių akademija) dėstytojai (straipsnio autorė yra viena iš jų).

Šiame tyrime naudojamasi tokiais duomenimis: 2016–2019 m. Šiaulių m. 5-os klasės mokinių matematikos olimpiadų užduotys (ir galimas už jas gauti maksimalus taškų skaičius), olimpiadų dalyvių kiekvienos užduoties įvertinimas, dalyvių skaičius, lytis ir mokykla, kurioje dalyvis mokosi.

Atliekant tyrimą buvo naudoti duomenų sisteminimo, lyginamosios analizės, aprašomosios statistikos, statistinių hipotezių tikrinimo, koreliacinės ir klasterinės analizės metodai. Statistinė analizė buvo atlikta SPSS programų paketu.

1 Pirminė duomenų analizė

1 lentelėje pateikti 2016–2019 m. 5-os klasės mokinių matematikos olimpiadų duomenys, kuriuos peržvelgus kyla dvi hipotezės: 1) skirtingų metų olimpiadų užduotys būdavo nevienodo sunkumo (taip būtų galima nuspręsti pagal maksimalų surinktų taškų skaičių); 2) olimpiadų rezultatus įtakojo skirtingais metais olimpiadose dalyvavusių moksleivių nevienodi gabumai (pagal minimalaus ir maksimalaus surinktų taškų skaičių santykį, kuris atitinkamai lygus 0,316; 0,292; 0,357; 0,261).

1 lentelė. Pradiniai duomenys.

Metai	Užduočių skaičius	Maksimalus taškų skaičius	Mokinių skaičius	Maksimalus surinktų taškų skaičius (%)	Minimalus surinktų taškų skaičius (%)
2016	9	25	22	19 (76%)	6 (24%)
2017	9	24	39	24 (100%)	7 (29,17%)
2018	10	30	23	28 (93,33%)	10 (33,33%)
2019	10	28	25	23 (82,14%)	6 (21,43%)

2017 ir 2018 metų olimpiadų, kuriose buvo surinkta daugiausia taškų, rezultatų standartinis nuokrypis s (atitinkamai 4,052 ir 5,35) rodo, kad 2018 m. olimpiadoje dalyvavusių moksleivių, kurių buvo žymiai mažiau negu 2017 m., surinktų taškų išsibarstymas apie vidurkį yra didesnis negu 2017 m. Vadinasi, galima daryti prielaidą,

[2] Dėl COVID-19 ir karantino 2020 ir 2021 m. šios olimpiados buvo atidedamos, o 2022 m. buvo organizuojama Šiaulių m. 6–8 klasių mokinių matematikos olimpiada.

kad 2017 m. olimpiadoje dalyvavo didesnis skaičius panašaus gabumo mokinių negu 2018 m.

2 Užduoties sunkumas ir diagnostinis informatyvumas

Išsamesnę 2016–2018 m. olimpiadų užduočių analizę jų sunkumo ir diagnostinio informatyvumo aspektais galima rasti kitame autorės straipsnyje (žr. [9]). Šioje straipsnio dalyje tais pačiais aspektais bus apžvelgtos ir 2019 m. olimpiados užduotys, prieš tai trumpai apibrėžiant užduoties sunkumo ir diagnostinio informatyvumo sąvokas bei jas nusakančias formules.

Užduoties sunkumu (o tiksliau, išspręstumu) vadinama charakteristika, išreiškianti statistinį užduoties išspręstumo lygį tiriamųjų grupėje ir nusakoma sunkumo koeficientu

$$p = \frac{n_t}{n},$$

čia n_t – teisingai užduotį išsprendusių mokinių skaičius, n – visų užduotį sprendusių mokinių skaičius [5].

Užduotis laikoma vertinga, jeigu $0{,}16 < p < 0{,}84$. Jei $p \leqslant 0{,}16$, uždaviniai laikomi sunkiais, jei $p \geqslant 0{,}84$ – lengvais (žr. [5]).

Skaičiuojant užduoties su pasirenkamaisiais atsakymais sunkumo koeficientą, yra atsižvelgiama į tikimybę atspėti teisingą atsakymą:

$$p = \frac{n_t - \frac{n-n_t}{k-1}}{n},$$

čia k – pasirinktinų atsakymų skaičius (plačiau žr. [5]).

Remiantis aukščiau pateiktomis formulėmis apskaičiavus užduočių sunkumo koeficientus (pagal mokinių surinktus taškus už kiekvieną užduotį) paaiškėjo, kad dominuoja vidutinio sunkumo užduotys. Jos sudaro 63 proc. visų nagrinėjamo laikotarpio užduočių, sunkios užduotys – 32 proc., o lengvos – tik 5 proc. visų užduočių.

2019 m. olimpiadoje buvo dvi užduotys su pasirenkamaisiais atsakymais (šių ir analogiškų užduočių 2016–2018 m. olimpiadose sunkumo koeficientų reikšmės pateiktos 2 lentelėje).

2 lentelė. Užduočių su pasirenkamaisiais atsakymais sunkumo koeficientai.

Metai	2016	2017	2018	2019
1 užduotis	0,836	0,815	0,635	0,76
2 užduotis	0,261	−0,026	0,076	−0,1

Pirmoji užduotis „Kurią dalį visų objektų sudaro konkrečiai įvardyti?“, kaip ir 2018 m., nepasirodė labai lengva, nors pagal 2016 m. ir 2017 m. olimpiadų rezultatus analogišką užduotį galima būtų laikyti pakankamai lengva (tarkime, kad pakankamai lengva užduotimi galima laikyti tokią, kurios $p > 0{,}81$ (žr. [9])). Antroji užduotis su pasirenkamaisiais atsakymais, kaip ir ankstesnėse olimpiadose, reikalauja pažymėti, kuriose figūrose tam tikra spalva sudaro nurodytą dalį bendro figūros ploto. Ši užduotis, kaip ir ankstesniais metais (išskyrus 2016 m.), mokiniams pasirodė sunki.

Šių užduočių sprendimų analizė rodo, kad dalis mokinių neatidžiai perskaito užduotį. Pvz., pirmojoje 2019 m. užduotyje buvo klausiama, kurios paslėptų šaškių dalies mergaitė **nerado**, o 20 proc. mokinių pažymėjo, kurią paslėptų šaškių dalį mergaitė **rado**. Antrojoje užduotyje (visose 2016–2019 m. olimpiadose) reikėjo rasti dvi figūras, bet tai sąlygoje nėra sukonkretinta: „Kuriose figūrose <...>?“. Todėl dalis mokinių, neatkreipę dėmesio į daugiskaitos formą sąlygoje, rado tik po vieną figūrą, o teisingai abu variantus 2019 m. pažymėjo tik 8 proc. sprendusiųjų.

Apskritai 2019 m. olimpiados dalyviams sunkiomis pasirodė net 7 užduotys: rasti, kuriose figūrose nuspalvinta tam tikra dalis bendro ploto; perkelti degtuką taip, kad būtų teisinga lygybė (analogiška užduotis 2018 m. mokiniams, pagal jų sprendimo rezultatus, buvo pakankamai lengva); suskaičiuoti, kiek kvadratų ir kiek stačiakampių pavaizduota paveikslėlyje; žodinis (pirkimo) uždavinys; sudėtinės figūros ploto apskaičiavimo uždavinys; kombinatorikos uždavinys ir laiko skaičiavimo uždavinys. Pagal vertinimo rezultatus, lengvų uždavinių šioje olimpiadoje nebuvo, nors, kaip jau minėta, ankstesnėse olimpiadose kai kurie panašūs uždaviniai mokiniams pasirodydavo ir pakankamai lengvi.

Kaip svyruoja bendras skirtingų metų olimpiadų užduočių rinkinių sunkumas (pagal sprendusiųjų rezultatus), galima pastebėti palyginus vidutines užduočių sunkumo koeficientų reikšmes (žr. 3 lentelę).

3 lentelė. Užduočių rinkinių sunkumo koeficientų vidurkiai.

Metai	2016	2017	2018	2019
Vid. koeficientas	0,519	0,58	0,467	0,238

Testų teorijoje uždaviniai laikomi diagnostiškai informatyviais, jeigu jų įvertinimo koreliacija su bendru testo balu, t. y. surinktų taškų skaičiumi, $r/tt \geqslant 0{,}2$ (žr. [5, 2]). Matematikoje įprasta koreliaciją laikyti labai silpna, jeigu jos koeficientas mažesnis už 0,3 [1, 3]. Tokiu būdu būtų dar labiau sugriežtinamas uždavinių priskyrimas diagnostiškai informatyviems.

4 lentelė. Užduočių rinkinių diagnostinis informatyvumas (procentais).

Metai	2016	2017	2018	2019
$r/tt \geqslant 0{,}2$	77,78	100	100	90
$r/tt \geqslant 0{,}3$	33,33	100	80	70

2019 m. olimpiados užduočių rinkinį sudaro 70 proc. diagnostiškai informatyvių užduočių, kurių $r/tt \geqslant 0{,}3$, ir net 90 proc. diagnostiškai informatyvių užduočių, kurių $r/tt \geqslant 0{,}2$ (žr. 4 lentelę). Vienintelė diagnostiškai neinformatyvia laikytina 2019 m. užduotis nebuvo sunki – nebuvo nė vieno mokinio, kuris jos visiškai nesuprastų ir negautų nė vieno (iš galimų 4) taško, o tos užduoties sunkumo koeficientas $p = 0{,}6$. Taip pat nebuvo sunki ($p = 0{,}44$) ir didžiausią koreliacijos koeficientą (0,721), vadinasi, ir didžiausią įtaką galutiniam rezultatui, turėjusi (tų pačių metų) užduotis.

Taigi, ir 2019 m. olimpiados užduočių analizė dar kartą patvirtino anksčiau (žr. [9]) padarytą išvadą, kad užduoties diagnostinis informatyvumas ir sunkumas nėra tapatūs dalykai.

Ar užduočių diagnostinis informatyvumas ir sunkumas yra susiję ir kaip, galima patikrinti ir statistiškai.

5 lentelė. Koreliacija tarp užduočių diagnostinio informatyvumo ir sunkumo koeficientų.

Metai	2016	2017	2018	2019
Koreliacijos koeficientas	$-0{,}518$	$-0{,}19$	$-0{,}749$	$-0{,}274$
p-reikšmė	0,153	0,625	0,013	0,444

5 lentelėje pateikti koreliacijos koeficientai tarp užduočių diagnostinio informatyvumo r/tt ir sunkumo p koeficientų kiekvienais metais. Matome, kad visais atvejais koreliacija yra neigiama, t. y. kuo uždavinys yra sunkesnis, tuo jis diagnostiškai informatyvesnis. Tačiau 2017 m. ir 2019 m. ji yra silpna ir statistiškai nereikšminga (p-reikšmės didesnės nei reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$), 2016 m. – vidutinė. Tik 2018 m. koreliacija yra stipri ir statistiškai reikšminga.

Norint patikrinti požymių nepriklausomumą, galima taikyti Pirsono χ^2 kriterijų. Hipotezės apie užduočių diagnostinio informatyvumo ir sunkumo koeficientų nepriklausomumą tikrinimo rezultatai, t. y. Pirsono χ^2 kriterijaus p-reikšmės (*Asymp. Sig.*), pateikti 6 lentelėje. Kadangi visais 4 atvejais p-reikšmės yra didesnės už reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0{,}05$, tai nulinė hipotezė neatmetama – užduočių diagnostinis informatyvumas nepriklauso nuo jų sunkumo ir atvirkščiai.

6 lentelė. Požymių nepriklausomumo tikrinimas.

Metai	2016	2017	2018	2019
Asymp. Sig. (2-sided)	0,23	0,23	0,267	0,254

3 Santykinių taškų, surinktų 2016–2019 m. olimpiadose, palyginimas

Kadangi maksimalus galimų surinkti taškų skaičius 2016–2019 m. olimpiadose yra skirtingas, kad būtų galima tinkamiau palyginti rezultatus toliau naudojami santykiniai taškai (t. y., mokinio surinktų taškų skaičiaus ir maksimalaus galimų atitinkamoje olimpiadoje surinkti taškų skaičiaus santykis).

Prieš formuluojant hipotezes dažnai yra reikalaujama patikrinti, ar turimi duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį. Tuo tikslu rekomenduojama atlikti Kolmogorovo—Smirnovo testą [6].

7 lentelėje pateikti pertvarkytų duomenų, t. y. santykinių taškų (ST_2016, ..., ST_2019), vidurkiai (*Mean*), standartiniai nuokrypiai (*Std. Deviation*) ir p-reikšmės (*Asymp. Sig.*), leidžiančios įvertinti Kolmogorovo–Smirnovo testo rezultatą. Visų duomenų p-reikšmės yra didesnės nei reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}01$, todėl hipotezės, kad duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, atmesti nėra pagrindo. Kadangi visose imtyse yra mažiau nei po 50 stebėjimų, kartu su Kolmogorovo–Smirnovo testu rekomenduojama atlikti ir Šapiro–Vilko (Shapiro–Wilk) testą [10]. Gautos abiejų testų p-reikšmės (*Sig.*) pateiktos 8 lentelėje. Iš gautų rezultatų matyti, kad ir nedideliam stebėjimų skaičiui skirtas Šapiro–Vilko testas patvirtina, jog duomenys yra

7 lentelė. Normalumo tikrinimas Kolmogorovo–Smirnovo testu.

	ST_2016	ST_2017	ST_2018	ST_2019
N	22	39	23	25
Mean	0,538	0,756	0,684	0,436
Std. Deviation	0,148	0,169	0,178	0,147
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,2	0,113	0,2	0,03

8 lentelė. Normalumo tikrinimas Kolmogorovo–Smirnovo ir Šapiro–Vilko testais.

		ST_2016	ST_2017	ST_2018	ST_2019
N		22	39	23	25
Kolmogorov–Smirnov	Sig.	0,2	0,113	0,2	0,03
Shapiro–Wilk	Sig.	0,395	0,093	0,144	0,153

pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, nes visų duomenų p-reikšmės yra didesnės nei reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}01$.

Nagrinėjant 1 lentelę kilo klausimas, ar skirtingų metų olimpiadų rezultatai priklauso nuo besiskiriančių (vienais metais – lengvesnių, kitais – sunkesnių) olimpiadų užduočių, ar nuo skirtingais metais olimpiadose dalyvavusių moksleivių nevienodų gabumų.

Jau vien dviejų minėtų analogiškų užduočių su pasirenkamaisiais atsakymais, kurios buvo visose nagrinėjamo laikotarpio olimpiadose, įvertinimų koreliacijų su bendru atitinkamos olimpiados balu, t. y. diagnostinio informatyvumo r/tt, (žr. 9 lentelę) palyginimas rodo, kad ir labai panašios užduotys skirtingais metais nevienodai įtakodavo bendrą rezultatą.

9 lentelė. Koreliacija su bendru testo balu.

Metai	2016	2017	2018	2019
1 užduotis	0,241	0,377	0,543	0,272
2 užduotis	0,409	0,506	0,674	0,494

Siekiant palyginti olimpiadų rezultatus ir išsiaiškinti, ar vienodi skirtingais metais olimpiadose dalyvavusių moksleivių vidutiniai įvertinimai, buvo tikrinama hipotezė apie skirtingų metų olimpiadose surinktų santykinių taškų vidurkių lygybę. Hipotezės tikrinimui taikytas Stjudento kriterijus dviem nepriklausomoms imtims. 10 lentelėje pateikti tikrintų porų dispersijų lygybės (Levene's Test for Equality of Variances stulpelyje) ir vidurkių lygybės (t-test for Equality of Means stulpelyje) rezultatai. Gautos Levene testo p-reikšmės ($Sig.$) visoms metų poroms yra didesnės nei reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$. Tai rodo, kad bet kurių dvejų metų olimpiadų rezultatų santykinių taškų dispersijos statistiškai reikšmingai nesiskiria. Vadinasi, į olimpiadą atrinktų moksleivių bendri matematiniai pajėgumai kiekvienais metais būdavo panašūs.

Kiek kitokia situacija pastebima analizuojant santykinių taškų vidurkių lygybės testo rezultatus. Daugeliu atveju gautoji p-reikšmė (*Sig.* (2-*tailed*)) yra mažesnė už reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0{,}05$, todėl hipotezė apie santykinių taškų vidurkių lygybę tais metais atmetama. Tai reiškia, kad 2016 m. olimpiadoje dalyvavę mokiniai savo pajėgumu skyrėsi nuo 2017 m. ir 2018 m. olimpiadose dalyvavusiųjų, 2019 m.

10 lentelė. Santykinių taškų vidurkių palyginimas.

Metų poros	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means		
	F	Sig.	t	Sig. (2-tailed)	Mean difference
2016, 2017	0,470	0,496	−5,049	0,000	−0,2177
2016, 2018	1,108	0,298	−2,977	0,005	−0,1458
2016, 2019	0,060	0,808	2,378	0,022	0,1026
2017, 2018	0,200	0,656	1,586	0,118	0,0719
2017, 2019	0,243	0,624	7,775	0,000	0,3203
2018, 2019	0,839	0,364	5,278	0,000	0,2484

olimpiadoje dalyvavę – nuo 2017 m. ir 2018 m. dalyvavusiųjų (2017 m. ir 2018 m. olimpiadose dalyvavo gabesni mokiniai). 2017 m. ir 2018 m. olimpiadų dalyvių santykinių taškų vidurkiai statistiškai reikšmingai nesiskiria, vadinasi, tų metų olimpiadose dalyvavo vidutiniškai panašaus gabumo mokiniai, nepaisant skirtingo tų metų olimpiadų dalyvių skaičiaus. Tai rodo ir tas faktas, kad 2017 m. ir 2018 m. buvo surinkta daugiausia taškų (žr. 1 lentelę). 2016 m. olimpiadoje dalyvavusius mokinius galima laikyti panašaus gabumo kaip ir 2019 m. olimpiadoje dalyvavusiuosius, nes pasirinkus kitą reikšmingumo lygmenį gaunama, kad $p = 0{,}022 > 0{,}01 = \alpha$, t. y. santykinių taškų vidurkiai lygūs.

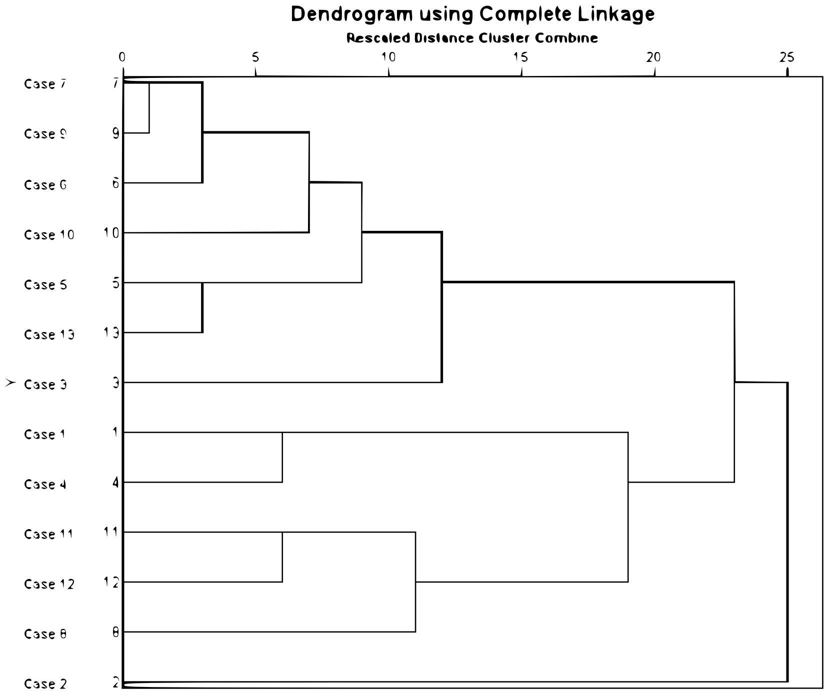
4 Mokyklų klasterizavimas

Ne paslaptis, kad kiekviena mokykla siekia turėti didesnį prestižą ir parodyti visuomenei kuo aukštesnius ugdymo rezultatus. Mokyklos prestižą neabejotinai kelia ir mokinių aukšti pasiekimai olimpiadose bei konkursuose [4].

Šiaulių m. (II-jo etapo) matematikos olimpiadoje dalyvauja mokiniai iš skirtingų Šiaulių m. mokyklų. 2016 m. dalyvavo mokiniai iš 14-os mokyklų, 2017 m. mokyklų skaičius išliko tas pats, bet skyrėsi viena mokykla (dalyvavo mokiniai iš kitos mokyklos, iš kurios 2016 m. mokinių nebuvo). 2018 m. ir 2019 m. dalyvavo mokiniai iš 13-os tų pačių mokyklų, todėl tolesnei analizei pasirinkti tik pastarieji dveji metai.

Iš olimpiadose surinktų taškų ir užimtų prizinių vietų matyti, kad vieniems mokiniams pasiseka labiau, kitiems mažiau. Be to, skiriasi dalyvių skaičius – iš vienų mokyklų būna tik po 1 mokinį, iš kitų atvyksta po 2–3 (2019 m. iš vienos mokyklos buvo net 4 mokiniai), skiriasi dalyvaujančių mergaičių ir berniukų skaičius. Šios straipsnio dalies tikslas – nustatyti, pagal kokius kriterijus galima būtų suskirstyti, jei tai įmanoma, mokyklas, turint informaciją apie 5-os klasės mokinių dvejų metų matematikos olimpiadų rezultatus (kiekvienos mokyklos dalyvių santykinių taškų vidurkis, t. y. kokia vidutiniškai taškų dalis tenka kiekvienam tos mokyklos deleguotam olimpiados dalyviui, 2018 m. ir 2019 m.; užimtų prizinių vietų 2018 m. ir 2019 m. suminis skaičius) bei dalyvius (iš kurios mokyklos ir kiek mokinių (kiek berniukų ir kiek mergaičių) dalyvavo olimpiadoje 2018 m. ir 2019 m.).

Norint nustatyti objektų panašumą ir suskirstyti juos į panašių objektų grupes yra taikoma klasterinė analizė. Naudojantis SPSS paketu, taikant hierarchinį klasterinės analizės tolimiausio kaimyno duomenų jungimo (klasterizavimo) meto-



1 pav. Mokyklų klasteriai.

dą, kai $\rho(A,B) = \max_{\substack{X_i \in A \\ Y_j \in B}} \rho(X_i, Y_j)$, pasirinkus Euklido atstumo kvadrato matą $\|X - Y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$ ir standartizavus kintamųjų reikšmes, gaunami tokie rezultatai (žr. 1 pav.).

Iš gautos dendrogramos galima lengvai pastebėti, kad susidaro 4 klasteriai: (3, 5, 6, 7, 9, 10, 13), (1, 4), (8, 11, 12) ir (2). Klasterius sudarančių atvejų (*Case*) numeriai žymi abėcėlės tvarka surašytų mokyklų kodinius numerius.

Pirmąjį klasterį sudaro tos mokyklos, iš kurių 2019 m. olimpiadoje dalyvavo tik po 1 mokinį, o bendra 2018 m. ir 2019 m. dalyvavusių mokinių suma buvo mažesnė nei 5, t. y. iš tų mokyklų buvo deleguota mažiausiai mokinių.

Antrąjį ir ketvirtąjį klasterius sudaro tos mokyklos, kurių mokiniai užėmė daugiausia prizinių vietų atitinkamai 2018 m. ir 2019 m.: 2018 m. „4“ mokyklos mokiniai užėmė pirmą ir antrą vietas, „1“ mokyklos mokiniai – antrą ir trečią vietas, o 2019 m. „2“ mokyklos mokiniai užėmė pirmą ir antrą vietas. Dar galima pastebėti, kad iš antrąjį ir ketvirtąjį klasterius sudarančių mokyklų atitinkamų metų olimpiadose dalyvavo po 3 mokinius, kurie bendrai surinko didžiausią taškų sumą savo mokyklai. Be to, iš antrąjį klasterį sudarančių mokyklų 2018 m. olimpiadoje dalyvavo po 1 berniuką ir 2 mergaites.

Trečiąjį klasterį sudaro tos mokyklos, iš kurių 2018 m. olimpiadoje dalyvavo po 2 mokinius, o 2019 m. – po 3 mokinius (išskyrus „2“ mokyklą, kuri pateko į atskirą ketvirtąjį klasterį). Tarp šį klasterį sudarančių „11“ ir „12“ mokyklų bendra dar ir tai, kad 2019 m. šių mokyklų mokiniai užėmė aukštesnes vietas, t. y. surinko po daugiau taškų negu 2018 m.

5 Išvados

Atlikus lyginamąją 5-os klasės matematikos olimpiadų užduočių sprendimo rezultatų analizę, galima daryti tokias išvadas:

1. Ne visais metais olimpiadose dalyvaujančių moksleivių gabumai buvo vienodi. 2017 m. ir 2018 m., palyginus su 2016 m. ir 2019 m., olimpiadose dalyvavo gabesni mokiniai.
2. Analogiškos užduotys skirtingais metais olimpiadų dalyviams pasirodo nevienodai sunkios/lengvos.
3. Užduočių su pasirenkamaisiais atsakymais sprendimų analizė parodė, kad ir olimpiadoje dalyvaujantys mokiniai ne visada atidžiai perskaito uždavinio sąlygą, neįsigilina į tai, ką reikia rasti.
4. Statistiškai įrodyta, kad užduočių diagnostinis informatyvumas ir sunkumas yra nepriklausomi dydžiai.
5. Klasterinės analizės pagalba galima išskirti mokyklas, kurios į olimpiadą atsiunčia mažiausiai mokinių, ir mokyklas, kurių mokiniai tam tikrais metais užėmė daugiausia prizinių vietų.

Literatūra

[1] A. Bakštys. *Statistika ir tikimybė.* TEV, Vilnius, 2006.

[2] B. Bitinas. *Statistiniai metodai pedagogikoje ir psichologijoje.* Šviesa, Kaunas, 1974.

[3] V. Čekanavičius, G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai I.* TEV, Vilnius, 2006.

[4] P.S. Kenderov. Competitions and mathematics education. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pp. 1583–1598, Madrid, Spain, 2006.

[5] D. Kiseliova, A. Kiseliovas. *Matematinių gebėjimų diagnostika. I.* ŠU l-kla, Šiauliai, 2004.

[6] T. Leonavičienė. *SPSS programų paketo taikymas statistiniuose tyrimuose.* VPU l-kla, Vilnius, 2006.

[7] Mokinių dalykinių olimpiadų, konkursų ir kitų renginių nuostatai, 2020. https://e-seimas.lrs.lt/portal/legalAct/lt/TAD/adefac108f0711eaa51db668f0092944?jfwid=-vvheria2.

[8] B. Narkevičienė. *Gabūs vaikai: iššūkiai ir galimybės.* Technologija, Kaunas, 2007.

[9] K. Piaseckienė. Penktos klasės matematikos olimpiadų užduočių sprendimo rezultatų analizė. *Liet. matema. rink. LMD darbai, ser. B*, **59**:76–81, 2018.

[10] K. Pukėnas. *Sportinių tyrimų duomenų analizė SPSS programa.* LKKA, Kaunas, 2005.

[11] I. Zenkevičiūtė, V. Dabrišienė. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkurso užduočių statistinė analizė. *Liet. matem. rink. LMD darbai*, **50**:134–139, 2009.

SUMMARY

Statistical comparison of results of problem solutions for the fifth grade mathematics olympiads

K. Kanišauskienė

The article presents a comparable analysis of the results of solving problems in Šiauliai city (the 2nd Stage) mathematics olympiads for the 5th grade students throughout 2016-–2019. It aims to find out whether school students selected for olympiads at different times are characteristic of similar giftedness, to ascertain that the level of difficulty of problems to be solved does not always reflect their diagnostic informativity and to try to divide schools to clusters according to students who participated in olympiads and their results.

Keywords: clusters; mathematics olympiad; statistical analysis