Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 35–40

Об одном функциональном уравнении, связанном с автоморфизмом единичного круга

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Резюме. В классе аналитических в единичном круге E функций $f(z)$, $f(0)=1$, $f(z)\neq 0$, полностью решается функциональное уравнение

$$(1+\bar{\zeta}e^{i\theta}z)^p f(z) = f(\omega(0))f(z),$$

где $\omega(z)=(e^{i\theta}z+\zeta)/(1+\bar{\zeta}e^{i\theta}z)$ – автоморфизм круга E.

Ключевые слова: аналитическая функция, единичный круг, автоморфизм круга.

Введение. Обозначим $\tilde{\mathrm{A}}_0(E)$ класс аналитических в круге E (т.е. в круге $|z|<1$)) функций $f(z)$, $f(0)=1$ и $f(z)\neq 0$ в E. Пусть p – целое число. В данной статье дается полное решение функционального уравнения

$$\psi(z)f(\omega(z)) = f(\omega(0))f(z), \quad f(z)\in \tilde{A}_0(E), \tag{1}$$

где

$$\psi(z)=(1+\bar{\zeta}e^{i\theta}z)^p, \quad \psi(0)=1,$$

и

$$\omega=\omega(z)=\frac{e^{i\theta}z+\zeta}{1+e^{i\theta}\bar{\zeta}z}, \quad \zeta\in E,\ \theta\in(-\infty,\infty), \tag{2}$$

есть автоморфизм (омега-преобразование) круга E. Множество всех автоморфизмов вида (2) обозначим L.

Сначала рассмотрим случай $p=0$. Тогда имеем функциональное уравнение

$$f(\omega(z)) = f(\omega(0))f(z), \tag{3}$$

Уравнение (3) относятся к числу функциональных уравнений вида

$$f(\varphi(z)) = sf(z),$$

где $\varphi(z)$ – фиксированная функция и $s\neq 0$. Эти уравнения изучал Шредер в действительной области, получившие название функциональных уравнений Шредера. Позднее Ж. Кенигс [1] и Фату [2] рассмотрели случай, когда функция $\varphi(z)$ представляет собой конечное произведение Бляшке. Ими были доказаны теоремы о существовании и единственности аналитических решений последнего функционального уравнения, однако все функции, удовлетворяющие этому уравнению, не были найдены ([3]).

Функциональное уравнение (3) полностью решено нами в [5]. Поэтому мы приступим к решению функционального уравнения (1) после того, как познакомимся с определениями, обозначениями и сформулируем без доказательства те основные утверждения, имеющие место в работе [5], которые нам понадобятся в дальнейшем.

I. Точка τ называется неподвижной точкой омега-преобразования $\omega(z)$, если $\omega(\tau)=\tau$. Установлено, что вид решения функционального уравнения (1) зависит от расположения неподвижных точек $\omega(z)$.

ЛЕММА 1. *Имеют место следующие утверждения.* [4]

1. *Тождественное омега-преобразование $\omega(z)\equiv z$ имеет каждую точку плоскости своей неподвижной точкой.*

2. *Омега-преобразование $\omega(z)=\mathrm{e}^{i\theta}z$, где $\mathrm{e}^{i\theta}\neq 1$ имеет единственную неподвижную точку в начале координат.*

3. *Омега-преобразование*

$$\omega=\omega(z)=\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z},\quad 0<|\zeta|<1,$$

имеет две неподвижные точки τ_1 и τ_2, лежащие на концах диаметра единичной окружности $|z|=1$.

4. *Омега-преобразование*

$$\omega=\omega(z)=\frac{e^{i\theta}z+\zeta}{1+e^{i\theta}\bar{\zeta}},\quad 0<|\zeta|<1,\ e^{i\theta}\neq 1$$

имеет либо две различные неподвижные точки, либо две слившиеся неподвижные точки. В первом случае две различные неподвижные точки лежат на единичной окружности, или одна лежит внутри окружности, а другая лежит вне этой окружности. Две слившиеся неподвижные точки обязательно лежат на единичной окружности.

Других случаев расположения неподвижных точек, кроме указанных в лемме 1, омега-преобразования не имеют.

ЛЕММА 2. *Пусть τ_1,τ_2 – неподвижные точки омега преобразования $\omega(z)\in L$. Тогда омега-преобразование $\omega(z)$ можно записать в виде*

$$\omega(z)=\frac{z-(\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)\zeta z+\zeta}{1-\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2\zeta z},$$

где параметр ζ пробегает множество своих значений в зависимости от расположения неподвижных точек по отношению к кругу E.

Как видно из леммы 2, если τ_1, τ_2 – неподвижные точки некоторого омега-преобразования, то существует еще бесконечно много омега-преобразований из L, с теми же неподвижными точками. Обозначим множество всех таких омега-преобразований через $L(\tau_1, \tau_2)$. С помощью лемм 1,2 выделим подмножества множества $L(\tau_1, \tau_2)$ и введем следующие обозначения для них.

L_0 – множество всех ω-преобразований из L вида $\omega = e^{i\theta}z$, $\theta \in (-\infty, +\infty)$.

$L_{1,0}(\tau_1, \tau_2)$ – множество всех омега-преобразований из $L(\tau_1, \tau_2)$, у которых неподвижные точки τ_1, τ_2 лежат на единичной окружности $|z| = 1$ и $\tau_1 \neq \tau_2$.

$L_{1,1}(\tau_1, \tau_2)$ – множество всех омега-преобразований из $L(\tau_1, \tau_2)$, у которых неподвижные точки τ_1, τ_2 лежат на единичной окружности $|z| = 1$ и $\tau_1 = \tau_2$.

$L_2(\tau_1, \tau_2)$ – множество всех омега-преобразований из $L(\tau_1, \tau_2)$, у которых неподвижные точки подчинены условию $|\tau_1| < 1$, $|\tau_2| > 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие утверждения* [5].

1. *Если $\omega(z) = e^{i\theta}z \in L_0$, где $e^{i\theta} \neq 1$ и $e^{ik\theta} = 1$ при наименьшем натуральном $k \geqslant 2$, то уравнению*

$$f(\omega(z)) = f(\zeta)f(z), \quad f(z) \in \tilde{A}_0(E), \tag{4}$$

удовлетворяют только функции вида

$$f(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_{mk}z^{mk}.$$

Если же $\omega(z) = e^{i\theta}z \in L_0$ и $e^{in\theta} \neq 1$ при любом натуральном n, то уравнению (4) *удовлетворяет только функция $f(z) \equiv 1$.*

2. *Пусть $\omega = \omega(z) \in L_{1,0}(\tau_1, \tau_2)$, $\omega(0) \neq 0$ и D_1 область значений функции*

$$u = u(z) = \ln\frac{1 - \bar{\tau}_1 z}{1 - \bar{\tau}_2 z}, \quad u(0) = 0.$$

Тогда уравнению

$$f(\omega(z)) = f(\zeta)f(z), \quad f(z) \in \tilde{A}_0(E),$$

удовлетворяют только функции вида

$$f(z) = \exp\int_0^{u(z)} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

где $h(\xi)$ – произвольная аналитическая в области D_1 функция со свойством

$$h(\xi + u(\zeta)) = h(\xi), \quad \forall\xi \in D_1.$$

3. *Пусть* $\omega(z) \in L_{1,1}(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $\omega(0) \neq 0$ *и* D_2 – *область значений функции*

$$v(z) = \frac{z}{1 - \bar{\tau} z}.$$

Тогда функциональному уравнению

$$f(\omega(z)) = f(\zeta) f(z), \quad f(z) \in \tilde{A}_0(E),$$

удовлетворяют только функции вида

$$f(z) = \exp \int_0^{v(z)} h(\xi)\, d\xi,$$

где $h(\xi)$ – *произвольная аналитическая в области* D_2 *функция со свойством*

$$h(\xi + v(\zeta)) = h(\xi), \quad \forall \xi \in D_2.$$

4. *Пусть* $\omega(z) \in L_2(\tau_1, \tau_2)$, $\omega(0) \neq 0$, *и*

$$\eta = \eta(z) = \frac{1 - \tau_1^{-1} z}{1 - \tau_2^{-1} z}, \quad z \in \mathrm{E}, \ \eta_0 = \eta(\zeta).$$

Если $\eta_0^k = 1$ *для наименьшего натурального* $k \geqslant 2$, *то уравнению*

$$f(\omega(z)) = f(\zeta) f(z), \quad f(z) \in \tilde{A}_0(E), \tag{5}$$

удовлетворяют только функции вида

$$f(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_{mk} \left[\left(\frac{1 - \tau_1^{-1} z}{1 - \tau_2^{-1} z} \right)^{mk} - 1 \right].$$

Если же $\eta_0^n \neq 1$ *при любом натуральном* n, *то только функция* $f(z) \equiv 1$ *удовлетворяет уравнению* (5).

С помощью теоремы 1 мы нашли все функции, которые удовлетворяют функциональному уравнению (3) в зависимости от расположения неподвижных точек омега-преобразования.

II. Рассмотрим, наконец, функциональное уравнение (1). Нам понадобится

ЛЕММА 3. *Пусть* $\omega(z) \in L$, $\omega(0) \neq 0$. *Для того чтобы функция* $\varphi(z) = 1 - \bar{c} z$ *удовлетворяла функциональному уравнению*

$$\left(1 + \bar{\zeta} e^{i\theta} z\right) \varphi\left(\omega\left(z\right)\right) = \varphi\left(\omega\left(0\right)\right) \varphi\left(z\right)$$

необходимо и достаточно, чтобы точка была неподвижной точкой омега-преобразования

$$\omega(z) = \frac{e^{i\theta}z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\omega(z) \in L(\tau_1, \tau_2)$. Тогда общее решение функционального уравнения*

$$(1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z)^p f(\omega(z)) = f(\zeta)f(z), \quad f(z) \in \tilde{A}_0(E), \tag{6}$$

состоит только из функций

$$f(z) = \Big(1 - \frac{1}{\tau_2}z\Big)^p \varphi(z), |\tau_2| \geqslant 1, \tag{7}$$

где $\varphi(z)$ пробегает все функции из класса $\tilde{A}_0(E)$ и при любом $z \in E$ удовлетворяет равенству

$$\varphi(\omega(z)) = \varphi(\zeta)\varphi(z), \tag{8}$$

Доказательство. Пусть произвольно взятая функция $\varphi(z)$ из класса $\tilde{A}_0(E)$ удовлетворяет равенству (8). Покажем, что функция (7) удовлетворяет при любом $z \in E$ равенству (6). По лемме 3 имеем

$$(1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z)\Big(1 - \frac{1}{\tau_2}\omega(z)\Big) = \Big(1 - \frac{1}{\tau_2}\zeta\Big)\Big(1 - \frac{1}{\tau_2}z\Big).$$

Поэтому

$$(1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z)^p\Big(1 - \frac{1}{\tau_2}\omega(z)\Big)^p = \Big(1 - \frac{1}{\tau_2}\zeta\Big)^p\Big(1 - \frac{1}{\tau_2}z\Big)^p.$$

Опираясь на (8), получим

$$(1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z)^p\Big(1 - \frac{1}{\tau_2}\omega(z)\Big)^p\varphi(\omega(z)) = \Big(1 - \frac{1}{\tau_2}\zeta\Big)^p\varphi(\zeta)\Big(1 - \frac{1}{\tau_2}z\Big)^p\varphi(z).$$

Отсюда следует (6). Пусть теперь произвольно взятая функция $f(z)$ из класса $\tilde{A}_0(E)$ удовлетворяет при любом $z \in E$ равенству (6). Запишем эту функцию в виде (6), где $\varphi(z) \in \tilde{A}_0(E)$. Тогда легко видеть, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет при любом $z \in E$ равенству (8). Теорема доказана.

Литература

1. Koenigs, *Annales Ecole Norm*, (3), 1, 1884 et (3), 2 (1885).
2. Fatou, *Bull. soclete math.*, **47**, 1919 et 48 (1920).
3. Ж. Валирон, *Аналитические функции*, Госиздат, Москва (1957).
4. Л.Р. Форд, *Автоморфные функции*, М., Ленинград (1936).
5. E.G. Kir'yatskii, On a functional equation related to an automorphism of a unit circle, *Demonstratio Mathematica*, **XXXVIII**(1) (2005).
6. E.G. Kir'yatskii, On a functional equation related to an automorphism of a unit circle, *Demonstratio Mathematica*, **XXXVIII**(1) (2005).

REZIUMĖ

E. Kirjackis. Apie funkcionalinę lygtį susijusią su vienetinio skritulio automorfizmu

Šiame darbe pilnai išspręsta funkcionalinė lygtis

$$(1+\bar{\zeta}e^{i\theta}z)^p f(z) = f(\omega(0)) f(z),$$

kur $\omega(z) = (e^{i\theta}z+\zeta)/(1+\bar{\zeta}e^{i\theta}z)$ yra vienetinio skritulio analizinis automorfizmas.

SUMMARY

E. Kiriyatzkii. On a functional equation related to an automorphism of a unit circle

In this article the complete description of the decisions of a functional equation

$$(1+\bar{\zeta}e^{i\theta}z)^p f(z) = f(\omega(0)) f(z)$$

is given, where $\omega(z) = (e^{i\theta}z+\zeta)/(1+\bar{\zeta}e^{i\theta}z)$ – automorphism of a unit circle E and the decisions are searched among analytical in E functions. It is established, that research of a given functional equation is closely connected to property of stationary points of automorpism $\omega(z)$.

Keywords: analytical function, unit circle, automorphism of unit circle.