Liet. matem. rink, **45**, *spec. nr.*, 2006, 41–47

О некоторых свойствах оператора Шварца–Гопенгауза

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Резюме. Рассматриваются предложенное Б.Е. Гопенгаузом обобщение производной Шварца. Устанавливается связь с классом голоморфных в единичном круге функций с отличной от нуля n-ой разделенной разностью.

Ключевые слова: голоморфная функция, оператор, функционал, разделенная разность.

Пусть $F(z)$ голоморфная в области D функция. Выражение

$$\{F(z); z\} = \frac{F'''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2}\Big(\frac{F''(z)}{F'(z)}\Big)^2, \quad F'(z) \neq 0, \quad \forall z \in E,$$

называется производной Шварца функции $F(z)$, которая появилась при исследовании конформного отображения многоугольников на круг. Производная Шварца имеет многочисленные применения в геометрической теории функций комплексного переменного ([1], [2]). В этой теории важную роль играет класс однолистных в единичном круге E (т.е. в круге $|z| < 1$) функций ([3]). Например, З. Нехари ([4], [5]) установил, что для однолистности в E функции $F(z)$ необходимо выполнение неравенства

$$\big|\{F(z); z\}\big| \leqslant \frac{6}{(1-|z|^2)^2}, \quad \forall z \in E, \tag{1}$$

и достаточно выполнение неравенства

$$\big|\{F(z); z\}\big| \leqslant \frac{2}{(1-|z|^2)^2}. \tag{2}$$

Как показал Е. Хилл ([6]), константу 2 в (2) нельзя заменить большей. Идеи З. Нехари получили дальнейшее развитие в работах [6]–[8]. В статье [9] И.А. Александров вариационным методом нашел область значений функционала $\mathrm{I} = \{F(z_0); z_0\}$ на классе однолистных в E функций $F(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$. Оказалось, что область значений представляет собой круг радиуса $6(1-|z_0|^2)^{-2}$. И.Е. Базилевич и Г.М. Голузин ([2]), заметили, что неравенство (1) следует из найденного ими точного неравенства

$$|a_2^2 - a_3| \leqslant 1 \tag{3}$$

для коэффициентов однолистных в E функций.

Б.Е. Гопенгаузом в работе [10] был рассмотрен оператор

$$\breve{S}_n[F(z)] = \frac{F^{(n+2)}(z)}{F^{(n)}(z)} - \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{F^{(n+1)}(z)}{F^{(n)}(z)}\Big)^2, \quad F^{(n)}(z) \neq 0. \tag{4}$$

Мы будем его называть оператором Шварца–Гопенгауза, так как при $n=1$ получаем производную Шварца. Гопенгауз установил связь оператора (4) с классом $K_n(E)$, который был введен Э.Г. Кирьяцким в [11]. Напомним, что через $K_n(E)$, $n \geqslant 1$, обозначается класс голоморфных в E функций $F(z)$, для которых n-ая разделенная разность $[F(z); z_0, \ldots, z_n] \neq 0$, $\forall z_0, \ldots, z_n \in E$. Если $n=1$, то класс $K_1(E)$ совпадает с классом однолистных в E функций. Со свойствами функций из класса $K_n(E)$ можно познакомится в ([11], [12], [13]). Отметим несколько свойств, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Свойство 1. *Если $F(z) \in K_n(E)$, то $F^{(n)}(z) \neq 0$ в E.*

Свойство 2. *Если $F(z) \in K_n(E)$, то $cF(z) + P_{n-1}(z) \in K_n(E)$, где $c \neq 0$ и $P_{n-1}(z)$ – любой многочлен степени не выше $n-1$.*

Пусть L множество всех дробно-линейных функций вида

$$\omega = \omega(z; \zeta, \theta) = \frac{e^{i\theta}z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z}, \quad \zeta \in E,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Свойство 3. *Если $F(z) \in K_n(E)$, то*

$$(1 + \bar{\zeta}e^{i\theta}z)^{n-1} F\big(\omega(z;\zeta,\theta)\big) \in K_n(E), \quad \forall \omega(z;\zeta,\theta) \in L.$$

Введем нормирующий оператор по формуле

$$N_n[\Psi(z)] = \frac{n!}{\Psi^{(n)}(0)}\Big(\Psi(z) - \Psi(0) - \frac{1}{1!}\Psi^{(1)}(0)z - \cdots - \frac{1}{(n-1)!}\Psi^{(n-1)}(0)z^{n-1}\Big),$$

где $\Psi(z)$ – голоморфная в E функция с условием $\Psi^{(n)}(0) \neq 0$.

Опираясь на свойства 1, 2 и пользуясь нормирующим оператором, можно выделить в $K_n(E)$ класс $\tilde{K}_n(E)$ функций вида

$$F(z) = z^n + a_{2,n}z^{n+1} + a_{3,n}z^{n+2} + \cdots. \tag{5}$$

Здесь $a_{k,n}$ называется k-ым коэффициентом разложения в степенной ряд.

Свойство 4. *Класс $\tilde{K}_n(E)$ является компактным в себе множеством функций относительно равномерной сходимости внутри области E.*

Пусть $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$ и $\omega = \omega(z;\zeta,\theta) \in L$. На классе $\tilde{K}_n(E)$ рассмотрим омега-оператор

$$\Omega_n^{\omega}[F(z)] = N_n\Big[(1+\bar{\zeta}e^{i\theta}z)^{n-1}F\big(\omega(z;\zeta,\theta)\big)\Big].$$

Этот оператор переводит функцию из класса $\tilde{K}_n(E)$ снова в функцию из этого же класса [13]. Полагая $n=1$ и $\theta=0$, получим омега-оператор

$$\Omega_1^{\omega}[F(z)] = \frac{F(\omega(z;\zeta,\theta)) - F(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)F'(\zeta)},$$

часто применяемый в теории однолистных функций.

Обозначим $\Psi_n(z;\omega) = \Omega_n^{\omega}[F(z)]$ и разложим функцию $\Psi_n(z;\omega)$ в степенной ряд:

$$\Psi_n(z;\omega) = z^n + a_{2,n}(\zeta,\theta)z^{n+1} + a_{3,n}(\zeta,\theta)z^{n+2} + \cdots,$$

где для коэффициентов $a_{2,n}(\zeta,\theta)$ и $a_{3,n}(\zeta,\theta)$ имеют место формулы

$$a_{2,n}(\zeta,\theta) = e^{i\theta}\Big((1-|\zeta|^2)\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)} - \bar{\zeta}\Big), \tag{6}$$

$$a_{3,n}(\zeta,\theta) = e^{2\theta i}\Big(\big(1-|\zeta|^2\big)^2\frac{n!F^{(n+2)}(\zeta)}{(n+2)!F^{(n)}(\zeta)} - 2\big(1-|\zeta|^2\big)\frac{\bar{\zeta}F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)} + \bar{\zeta}^2\Big). \tag{7}$$

Теперь воспользуемся следующим разложением по степеням z:

$$\frac{z^n}{\Psi_n(z;\omega)} = \frac{1}{1 + a_{2,n}(\zeta,\theta)z + a_{3,n}(\zeta,\theta)z^2 + \ldots} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,n}(\zeta;\theta)z^k$$

и вычислим коэффициент $b_{2,n}(\zeta;\theta)$. Легко видеть, что

$$b_{2,n}(\zeta,\theta) = a_{2,n}^2(\zeta,\theta) - a_{3,n}(\zeta,\theta). \tag{8}$$

Пользуясь формулами (4), (6), (7), получим еще одно выражение для $b_{2,n}(\zeta,\theta)$:

$$b_{2,n}(\zeta,\theta) = \frac{-(1-|\zeta|^2)^2e^{2i\theta}}{(n+2)(n+1)}\check{S}_n[F(\zeta)]. \tag{9}$$

Из (9) находим

$$\check{S}_n[F(\zeta)] = \frac{-b_{2,n}(\zeta,\theta)(n+2)(n+1)}{e^{2i\theta}(1-|\zeta|^2)^2}. \tag{10}$$

Можно ввести связанную с оператором Шварца–Гопенгауза число

$$\sigma_n = \sup_{\Psi(z;\omega)\in\tilde{K}_n(E)} \big|b_{2,n}(\zeta,\theta)\big|. \tag{11}$$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\sigma_n = \max_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)} |a_{2,n}^2 - a_{3,n}|.$$

Доказательство. Согласно (8) имеем

$$\sigma_n = \sup_{\Psi_n(z;\omega)\in\tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2(\zeta,\theta) - a_{3,n}(\zeta,\theta)\right|.$$

Если функция $F(z)$ пробегает все функции из класса $\tilde{K}_n(E)$, и $\omega(z;\zeta,\theta)$ пробегает все функции из L, то функция $\Psi_n(z;\omega)$ пробегает также все функции из класса $\tilde{K}_n(E)$([13]). Отсюда, с учетом компактности класса $\tilde{K}_n(E)$ (свойство 4), получим

$$\sigma_n = \sup_{\Psi_n(z;\omega)\in\tilde{K}_n(E)} \left|a_{2,n}^2(\zeta,\theta) - a_{3,n}(\zeta,\theta)\right|$$
$$= \sup_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)} |a_{2,n}^2 - a_{3,n}| = \max_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)} |a_{2,n}^2 - a_{3,n}|$$

и теорема доказана.

В силу упомянутой компактности класса $\tilde{K}_n(E)$ в нем существует функция вида (5) с наибольшим по модулю вторым коэффициентом разложения в степенной ряд. Этот второй коэффициент обозначим δ_n и назовем ограндом класса $\tilde{K}_n(E)$. Заметим, что функция

$$\Phi_n(z) = \frac{z^n\left(1+\frac{1-n}{1+n}z\right)}{(1-z)^2} = z^n + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{n+2k-1}{1+n}z^{n+k-1} \in \tilde{K}_n(E),$$

и ее второй коэффициент равен $(n+3)/(n+1)$. Тогда ясно, что

$$\delta_n \geqslant \frac{n+3}{n+1}. \tag{12}$$

Из (10) имеем

$$\left|\breve{S}_n[F(z)]\right| \leqslant \frac{\sigma_n(n+2)(n+1)}{(1-|z|^2)^2}. \tag{13}$$

Так как оценка (3) является точной, то $\sigma_1 = 1$. Если в (13) взять $n=1$, то получим (1), т.е. результат Нехари. Точные значения σ_n при $n>1$ нам пока не удалось найти. Однако оценить константу σ_n сверху и снизу мы можем. Справедлива

Теорема 2. *Для σ_n справедливы неравенства*

$$\frac{4}{(n+1)^2} \leqslant \frac{\delta_n^2-1}{n+2} \leqslant \sigma_n \leqslant \frac{\delta_n^2}{n+2} + \frac{8\delta_n\cos^3\left(\frac13\arccos\frac{1}{\delta_n}\right)+4\cos^2\left(\frac13\arccos\frac{1}{\delta_n}\right)}{(n+2)\left(4\cos^2\left(\frac13\arccos\frac{1}{\delta_n}\right)-1\right)}. \tag{14}$$

Доказательство. Неравенство

$$\frac{4}{(n+1)^2} \leqslant \frac{\delta_n^2 - 1}{n+2}$$

сразу следует из (11). Как было сказано выше, в классе $\tilde{K}_n(E)$ существует функция $\Upsilon(z) = z^n + c_{2,n}z^{n+1} + c_{3,n}z^{n+2} + \ldots$, у которой $c_{2,n} = \delta_n$. Тогда, пользуясь методом вариаций, получим ([13])

$$c_{3,n} = \frac{(n+1)\delta_n^2 + 1}{n+2}.$$

Следовательно,

$$\delta_n^2 - c_{3,n} = \frac{\delta_n^2 - 1}{n+2}.$$

Так как

$$|\delta_n^2 - c_{3,n}| \leqslant \max_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)} |a_{2,n}^2 - a_{3,n}|,$$

то по теореме 1 имеем

$$\frac{\delta_n^2 - 1}{n+2} \leqslant \max_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)} |a_{2,n}^2 - a_{3,n}| = \sigma_n,$$

и левая часть (14) доказана.

Далее, пусть функция $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$. Тогда

$$\frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)F^{(n)}(z)} = a_{2,n} + \big((n+2)a_{3,n} - (n+1)a_{2,n}^2\big)z + \ldots .$$

Отсюда

$$(n+2)a_{3,n} - (n+1)a_{2,n}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F^{(n+1)}(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta}{(n+1)F^{(n)}(re^{i\theta})re^{i\theta}}, \quad 0 < r < 1.$$

Поэтому

$$\left|a_{3,n} - \frac{n+1}{n+2}a_{2,n}^2\right| r \leqslant \frac{1}{2\pi(n+2)}\int_0^{2\pi} \frac{|F^{(n+1)}(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta}{(n+1)|F^{(n)}(re^{i\theta})|}, \quad 0 < r < 1. \quad (15)$$

Так как функция $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$, то функция ([13])

$$\Psi_n(z;\omega) = z^n + a_{2,n}(\zeta,\theta)z^{n+1} + a_{3,n}(\zeta,\theta)z^{n+2} + \ldots \in \tilde{K}_n(E)$$

при любом $\omega = \omega(z;\zeta,\theta) \in L$. При этом для коэффициента $a_{2,n}(\zeta,\theta)$ справедлива формула (6). Опираясь на свойство огранда δ_n, получим

$$\big|a_{2,n}(\zeta,\theta)\big| = \left|\big(1 - |\zeta|^2\big)\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)} - \bar{\zeta}\right| \leqslant \delta_n, \quad \forall\zeta \in E, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi).$$

Отсюда

$$\left|\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)}\right| \leqslant \frac{\delta_n + r}{1-r^2}, \quad \forall |\zeta| = r. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следуют неравенства

$$\begin{aligned}\left|\frac{n+1}{n+2}a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi(n+2)r}\int_0^{2\pi} \frac{|F^{(n+1)}(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta}{(n+1)|F^{(n)}(re^{i\theta})|} \\ &\leqslant \frac{\delta_n + r}{(n+2)r(1-r^2)}, \quad 0<r<1.\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}|a_{2,n}^2 - a_{3,n}| &\leqslant \frac{|a_{2,n}^2|}{n+2} + \left|\frac{n+1}{n+2}a_{2,n}^2 - a_{3,n}\right| \\ &\leqslant \frac{\delta_n^2}{n+2} + \frac{1}{n+2}\frac{\delta_n + r}{r(1-r^2)}, \quad 0<r<1.\end{aligned} \tag{17}$$

Но левая часть в (17) не зависит от r, взятого из интервала $(0,1)$. Поэтому

$$|a_{2,n}^2 - a_{3,n}| \leqslant \frac{|a_{2,n}^2|}{n+2} + \left|a_{3,n} - \frac{n+1}{n+2}a_{2,n}^2\right| \leqslant \frac{\delta_n^2}{n+2} + \frac{1}{n+2}\min_{0<r<1}\frac{\delta_n + r}{r(1-r^2)}. \tag{18}$$

Так как неравенства (18) справедливы для любой функции из класса $\tilde{K}_n(E)$, то, учитывая теорему 1, получим

$$\max_{F(z)\in\tilde{K}_n(E)} |a_{2,n}^2 - a_{3,n}| = \sigma_n \leqslant \frac{\delta_n^2}{n+2} + \frac{1}{n+2}\min_{0<r<1}\frac{\delta_n + r}{r(1-r^2)}.$$

Нетрудно установить, что

$$\min_{0<r<1}\frac{\delta_n + r}{r(1-r^2)} = \frac{8\delta_n\cos^3\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_n}\right) + 4\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_n}\right)}{\left(4\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\delta_n}\right) - 1\right)}.$$

Таким образом, мы доказали и правую часть (14).

Литература

1. И.А. Александров, *Теория функций комплексного переменного*, Томск, 399–430 (2002).
2. Г.М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1965).
3. И.А. Александров, *Методы геометрической теории аналитических функций*, Томский госуниверситет, Томск (2001).
4. Z. Nehari, The schwarzian derivative and univalent functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**(5), 545–551 (1949).
5. Z. Nehari, Some criteria of univalence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**(5), 700–704 (1954).
6. E. Hille, Remarks on a paper by Zeev Nehari, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**(6), 552–553 (1949).

7. В. Покорный, О некоторых достаточных условиях однолистности, *Докл. АН СССР*, **79**, 743–746 (1951).
8. D. London, On the zeros of the solutions of $w''(z) + p(z)w(z) = 0$, *Pacific J. Math.*, **12**, 979–994 (1962).
9. И.А. Александров, Область значений функционала $\mathrm{I} = \{F; z_0\}$ на классе S, *Труды Томского государственного университета*, **155**, 56–60 (1961).
10. Б.Е. Гопенгауз, Об одном обобщении производной Шварца и его применении, *Математические заметки*, **10**(2), 229–238 (1971).
11. Э.Г. Кирьяцкий, О функциях, n-ая разделенная разность которых не равна нулю, *Лит. мат. сб.*, **1**(1–2), 109–114 (1961).
12. Э.Г. Кирьяцкий, Некоторые свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью, *Лит. мат. сб.*, **12**(1), 129–137 (1972).
13. E. Kirjackis, Some variational formulas in the class $\tilde{K}_n(E)$ and their applications, *Demonstratio mathematica*, XXXI(2), 265–274 (1998).

REZIUMĖ

E. Kirjackis. Kai kurios Švarco–Gopengauzo operatoriaus sav7ybės

Darbe nagrinėjamas B.E. Gopengauzo pasiūlytas apibendrinimas Švarco išvestinės, kuris taikomas klasės funkcijų su nevirstančiu nuliui n-os eilės padalytu skirtumu tyrimui.

SUMMARY

Eduard G. Kir'yatskii. On some properties of Schwartz–Gopengauz operator

The generalization of Schwarz's derivative proposed by B.E. Gopengauz, which is applied to the study of the properties of the class of functions with nonvanishing in the unit circle divided difference of n-th order is examined.

Keywords: holomorphic function, operator, functional, divided difference.