Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 48–52

Некоторые свойства линейно-инвариантного семейства n-го порядка

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ, Евгений КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Резюме. В работе определяется линейно-инвариантное семейство n-го порядка, на котором вводятся омега-оператор и связанные с ним функционалы. Изучаются их свойства.

Ключевые слова: голоморфная функция, омега-оператор, функционал.

Введение. Определим разделенную разность n-го порядка голоморфной в единичном круге E, т.е. в круге $|z| < 1$, функции $F(z)$ формулой ([1])

$$[F(z); z_0, ..., z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi - z_0)...(\xi - z_n)},$$

где Γ простой замкнутый контур, охватывающий точки $z_0, ..., z_n \in E$.

Обозначим через $\tilde{A}_n(E)$ класс голоморфных в E функций

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n}(F) z^{n+k-1}, \quad \text{где } F^{(n)}(z) \neq 0,\ \forall z \in E. \tag{1}$$

Пусть L множество всех функций

$$\omega = \omega(z; \zeta; \theta) = \frac{e^{i\theta} z + \zeta}{1 + \bar{\zeta} e^{i\theta} z}, \quad \zeta \in E,\ \theta \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

Множество L образует группу преобразований, если операцию умножения ввести по формуле $\omega_1 \times \omega_2 = \omega_1(\omega_2)$. Зафиксируем $\omega = \omega(z; \zeta; \theta) \in L$ и введем на классе $\tilde{A}_n(E)$ омега-оператор Ω_n^ω:

$$\Omega_n^\omega[F(z)] = \frac{z^n \big[F(z); \omega, \overbrace{\zeta, ..., \zeta}^{n}\big]}{\big(1 + \bar{\zeta} e^{i\theta} z\big) \frac{1}{n!} F^{(n)}(\zeta)}.$$

Оператор Ω_n^ω отображает функцию $F(z)$ из класса $\tilde{A}_n(E)$ в функцию из того же класса. Множество операторов Ω_n^ω образует группу преобразований, если операцию умножения ввести по формуле $\Omega_n^{\omega_1} \times \Omega_n^{\omega_2} =$

$\Omega_n^{\omega_1}[\Omega_n^{\omega_2}]$. Заметим, что $\Omega_n^{\omega_1} \times \Omega_n^{\omega_2} = \Omega_n^{\omega_2 \times \omega_1}$. При $n = 1$ и $\omega = \omega(z;\zeta;0)$ получим оператор

$$\Omega_1^{\omega}[F(z)] = \frac{F\Big(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}}\Big) - F(\zeta)}{\big(1-|\zeta|^2\big)\,F'(\zeta)},$$

часто применяемый в теории однолистных функций и многих разделах математического анализа ([2]–[4]). Зафиксируем функцию $F(z) \in \tilde{A}_n(E)$ вида (1) и функцию $\omega = \omega(z;\zeta;\theta) \in L$ вида (2). Тогда

$$F(z;\omega) = \Omega_n^{\omega}[F(z)] = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n}(\omega;F) z^{n+k-1},$$

где для второго коэффициента $a_{2,n}(\omega;F)$ справедлива формула

$$a_{2,n}(\omega;F) = e^{i\theta}\Big(-\bar{\zeta} + (1-|\zeta|^2)\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)}\Big).$$

В частности, если $\omega = \omega(z;0;0)$, то

$$a_{2,n}(\omega;F) = a_{2,n}(F) = \frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)F^{(n)}(0)} = \frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}.$$

Образуем множество $\tilde{\mathfrak{I}}_n(E)$ голоморфных в E функций $F(z)$ со следующем свойством: если $F(z) \in \tilde{\mathfrak{I}}_n(E)$, то и $F(z;\omega) = \Omega_n^{\omega}[F(z)], \forall \omega \in E$. Это множество называется линейно-инвариантным семейством n-го порядка. Интерес к таким семействам вызван тем, что многие известные классы голоморфных в некоторой области функций является линейно-инвариантными семействами и обладают рядом свойств, общих для всех таких семейств ([4], [7], [8]). В 1964 году общие свойства линейно-инвариантных семейств первого порядка были сформулированы немецким математиком Поммеренке в работе [2], с целью обобщения многих свойств однолистных функций на более широкие классы. Несколько ранее (в 1961 году) автором этой статьи были приведены примеры линейно-инвариантных семейств n-го порядка ([5]). Это были классы голоморфных в E функций $F(z)$, для которых $[F(z);z_0,\dots,z_n] \neq 0$, при любых $z_0,\dots,z_n \in E$ ([5], [6]). Результаты, полученные в последнее время по линейно-инвариантным семействам первого порядка, опубликованы в обзорной статье Я. Годули и В. В. Старкова ([4]).

1. Нам понадобятся леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\omega_1,\omega_2 \in L$ *и* $F_2 \in \Omega_n^{\omega_1}[F_1]$, $F_3 \in \Omega_n^{\omega_2}[F_2]$. *Тогда*

$$F_3 \in \Omega_n^{\omega_3}[F_1], \quad \text{где } \omega_3 = \omega_1(\omega_2).$$

Пусть $F(z)$ фиксированная функция из класса $\tilde{A}_n(E)$. Присоединим к функции $F(z)$ функции вида $F(z;\omega) = \Omega_n^{\omega}[F(z)]$, где $\omega = \omega(z;\zeta,\theta)$ пробегает все автоморфизмы из L. Благодаря лемме 1, полученное множество функций будет линейно-инвариантным семейством n-го порядка. Назовем его простым линейно-инвариантным семейством n-го порядка с образующей функцией $F(z)$ и обозначим $\tilde{\Pi}_n(E;F)$. Если нет надобности указывать образующую, то обозначаем $\tilde{\Pi}_n(E)$. В данной работе мы изучаем некоторые свойства простого линейно-инвариантного семейства n-го порядка.

ЛЕММА 2. *Если* $F_2(z) \in \tilde{\Pi}_n(E;F_1)$, *то* $F_1(z) \in \tilde{\Pi}_n(E;F_2)$. *Другими словами, любая функция из простого семейства может быть образующей этого же семейства и* $\tilde{\Pi}_n(E;F_1) \equiv \tilde{\Pi}_n(E;F_2)$.

Доказательство. Так как $F_2(z) \in \tilde{\Pi}_n(E;F_1)$, то $F_2 = \Omega_n^{\omega_1}[F_1]$, где $\omega_1 \in L$. Возьмем любую функцию $F_3 \in \tilde{\Pi}_n(E;F_2)$. Тогда $F_3 = \Omega_n^{\omega_2}[F_2]$, где $\omega_2 \in L$ Согласно лемме 1 получим $F_3 = \Omega_n^{\omega_3}[F_1]$, где $\omega_3 = \omega_1(\omega_2) \in L$. Это означает, что

$$\tilde{\Pi}_n(E;F_2) \subset \tilde{\Pi}_n(E;F_1).$$

Так как $F_1(z) \in \tilde{\Pi}_n(E;F_2)$, то $F_1 = \Omega_n^{\omega_4}[F_2]$, где $\omega_4 \in L$. Возьмем любую функцию $F_4 \in \tilde{\Pi}_n(E;F_1)$. Тогда $F_4 = \Omega_n^{\omega_5}[F_1]$, где $\omega_5 \in L$. Согласно лемме 1 получим $F_4 = \Omega_n^{\omega_6}[F_2]$, где $\omega_6 = \omega_4(\omega_5) \in L$. Это означает, что

$$\tilde{\Pi}_n(E;F_1) \subset \tilde{\Pi}_n(E;F_2).$$

Таким образом, $\tilde{\Pi}_n(E;F_1) \equiv \tilde{\Pi}_n(E;F_2)$.

ЛЕММА 3. *При фиксированном* $\omega \in L$ *оператор* $\Psi = \Omega_n^{\omega}[F]$ *взаимно однозначно отображает простое семейство* $\tilde{\Pi}_n(E)$ *на себя.*

Доказательство. Пусть $F_1, F_2 \in \tilde{\Pi}_n(E)$ с образующей F_0. Покажем, что если $F_1 \neq F_2$, то $\Omega_n^{\omega}[F_1] \neq \Omega_n^{\omega}[F_2]$. Предположим, что при фиксированном $\omega \in L$ будет $\Omega_n^{\omega}[F_1] = \Omega_n^{\omega}[F_2]$, но $F_1 \neq F_2$. Тогда справедливо равенство $a_{2,n}(\omega;F_1) = a_{2,n}(\omega;F_2)$, из которого следует

$$\frac{F_1^{(n+1)}(z)}{F_1^{(n)}(z)} = \frac{F_2^{(n+1)}(z)}{F_2^{(n)}(z)}, \quad \forall z \in E.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\ln\frac{F_1^{(n)}(z)}{F_2^{(n)}(z)}\right) = 0, \quad \forall z \in E, \text{ где полагаем } \ln\frac{F_1^{(n)}(0)}{F_2^{(n)}(0)} = \ln 1 = 0.$$

Но в этом случае $F_1^{(n)}(z) = const \cdot F_2^{(n)}(z)$, $\forall z \in E$. Так как $F_1^{(n)}(0) = F_2^{(n)}(0) = n!$, то $const = 1$ и $F_1^{(n)}(z) = F_2^{(n)}(z)$, $\forall z \in E$. Отсюда следует, что $F_1(z) = F_2(z)$, $\forall z \in E$. Полученное противоречие доказывает, что если $F_1 \neq F_2$, то $\Omega_n^{\omega}[F_1] \neq \Omega_n^{\omega}[F_2]$. Далее, опираясь на лемму 2, получаем $\tilde{\Pi}_n(E; F_1) \equiv \tilde{\Pi}_n(E) \equiv \tilde{\Pi}_n(E; F_2)$ и поэтому $\Psi_1 = \Omega_n^{\omega}[F_1] \in \tilde{\Pi}_n(E), \Psi_2 = \Omega_n^{\omega}[F_2] \in \tilde{\Pi}_n(E)$. Заметим, что если $\Psi_1 = \Omega_n^{\omega}[F]$ и $\Psi_2 = \Omega_n^{\omega}[F]$, то $\Psi_1 = \Psi_2$. Далее, пусть $\tilde{\omega} \equiv z$. Обозначим через ω^* преобразование обратное к преобразованию ω, т.е. $\omega^*(\omega) = \omega(\omega^*) = \tilde{\omega} \in L$. Пусть теперь H есть произвольная функция из $\tilde{\Pi}_n(E; F_0)$. Значит, существует такое $\omega_0 \in L$, что $H = \Omega_n^{\omega_0}[F_0]$. Возьмем функцию $F^* = \Omega_n^{\omega_0(\omega^*)}[F_0] \in \tilde{\Pi}_n(E; F_0)$. Тогда $H = \Omega_n^{\omega}[F^*]$. В самом деле,

$$\Omega_n^{\omega}[F^*] = \Omega_n^{\omega}[\Omega_n^{\omega_0(\omega^*)}[F_0]] = \Omega_n^{\omega_0(\omega^*(\omega))}[F_0] = \Omega_n^{\omega_0}[F_0] = H.$$

Из всего сказанного следует справедливость леммы 3.

2. Пусть $\tilde{\Pi}_n(E; F_0)$ простой класс. Введем на этом классе функционалы

$$\delta(F) = \sup_{\omega\in L} |a_{2,n}(\omega; F)|, \sigma(\omega) = \sup_{F\in\tilde{\Pi}_n(E;F_0)} |a_{2,n}(\omega; F)|, \delta = \sup_{F(z)\in\tilde{\Pi}_n(E;F_0)} |a_{2,n}(F)|.$$

Число δ называется ограндом простого семейства $\tilde{\Pi}_n(E; F_0)$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место равенства*

$$\delta(F) = \delta, \quad \forall F \in \tilde{\Pi}_n(E; F_0), \tag{3}$$

$$\sigma(\omega) = \delta, \quad \forall \omega \in L. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\Pi}_n(E)$ некоторое простое семейство и $F_1(z)$ произвольно фиксированная функция из этого семейства. По лемме 2 имеем $\tilde{\Pi}_n(E) \equiv \tilde{\Pi}_n(E; F_1)$. Если ω пробегает все функции из L, то

$$\Omega_n^{\omega}[F_1(z)] = z^n + a_{2,n}(\omega; F_1)z^{n+1} + \dots$$

пробегает все функции из простого семейства $\tilde{\Pi}_n(E)$. Тогда $a_{2,n}(\omega; F_1)$ пробегает все вторые коэффициенты этих функций. Отсюда следует

$$\sup_{\omega\in L} |a_{2,n}(\omega; F_1)| = \sup_{F\in\tilde{\Pi}_n(E;F_0)} |a_{2,n}(F)| = \delta.$$

Так как $F_1(z)$ любая функция из простого семейства $\tilde{\Pi}_n(E; F_0)$, то равенство (3) доказано.

Пусть снова $\tilde{\Pi}_n(E)$ некоторое простое семейство и $\omega = \omega(z; \zeta, \theta)$ произвольно фиксированная функция из L. Если F пробегает все функции из $\tilde{\Pi}_n(E)$, то по лемме 3 функция

$$\Omega_n^{\omega}[F(z)] = z^n + a_{2,n}(\omega; F)z^{n+1} + \dots$$

также пробегает все функции из простого семейства $\tilde{\Pi}_n(E; F_0)$. Тогда $a_{2,n}(\omega; F)$ пробегает вторые коэффициенты разложения этих функций. Отсюда следует

$$\sigma(\omega) = \sup_{F \in \tilde{\Pi}_n(E; F_0)} \left|a_{2,n}(\omega; F)\right| = \sup_{F \in \tilde{\Pi}_n(E; F_0)} |a_{2,n}(F)| = \delta.$$

Так как ω произвольно фиксированная функция из L, то равенство (4) доказано.

Литература

1. Г.М. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, М., Наука, 1–478 (1971).
2. Ch. Pommerenke, Linear-invariante Familien analitischer Funktionen I, *Math. An.*, **155**, 108–154 (1964).
3. Г.М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1–627 (1966).
4. Я. Годуля, В.В. Старков, Линейно инвариантные семейства, *Труды Петрозаводского государственного университета*, серия Математика, выпуск 5, 1–95 (1998).
5. Э.Г. Кирьяцкий, Об одном линейно-инвариантном классе функций, *Четвертый всесоюзный математический съезд*, Ленинград 3–12 июля 1961 года.
6. Э.Г. Кирьяцкий, О функциях, n-ая разделенная разность которых не равна нулю, *Лит. мат. сб.*, **1**(1–2), 109–114 (1961).
7. E.G. Kiriyatzkii, J. Kirjackis, On Some properties of the omega-operator, defined on class of analytic in the half-plane functions, *Nonlinear Analysis Modeling and Control*, **9**(2), 117-128 (2004).
8. E.G. Kiriyatzkii, J. Kirjackis, On some extremal problems on linearly invariant classes, *Nonlinear Analysis Modeling and Control*, **10**(1), 1–10 (2005).

REZIUMĖ

E. Kirjackis, J. Kirjackis. Kai kurios n-tosios eilės tiesiškai invariantinės šeimos savybes

Darbe apibrėziama n-os eilės tiesiškai invariantinė šeima. Šitoje šeimoje apibrėziamas omega-operatorius ir susieti su juo funktionalai. Tirimos jų savybės.

SUMMARY

E. Kiriyatzkii, J. Kirjackis. On some properties of the linear-invariant family of n-th order

In the work the linear-invariant family n-th order is determined. The omega-operator and the functionals related with it are introduced on this family. Their properties are studied.

Keywords: holomorphic function, omega operator, functional.