Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 78–83

n-matės afininės erdvės neholonominių kompleksų diferencialinė geometrija

Kazimieras NAVICKIS (VU)
el. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Reziumė. Šiame darbe nagrinėjama n-matės afininės erdvės A_n neholonominių kompleksų $NGr(1,n,2n-4)$ diferencialinė geometrija.

Raktiniai žodžiai: afininė erdvė, tiesių kompleksas, neholonominis kompleksas.

Tarkime kad $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{e_i})$ yra judamasis reperis afininėje erdvėje A_n. Tada šio reperio infinitezimaliojo judesio diferencialinės lygtys yra tokios ($i, j, \ldots = 1, \ldots, n$):

$$d\overrightarrow{A} = \omega^i \overrightarrow{e_i}, \; d\overrightarrow{e_i} = \omega_i^j \overrightarrow{e_j}.$$

Tarkime, kad $Gr(1,n)$ – erdvės A_n Grasmano daugdara. Nagrinėsime glodų $(2n-4)$-matį Grasmano daugdaros $Gr(1,n)$ podaugdarį $Gr(1,n,2n-4)$. Jis vadinamas afininės erdvės $A_n(2n-4)$-mačiu tiesių kompleksu. Tarkime, kad l-daugdaros $Gr(1,n)$ sudaromasis elementas. Judamąjį reperį $\{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{e_i}\}$ parinksime taip, kad $l = (A, \overrightarrow{e_1})$. Kompleksą $Gr(1,n,2n-4)$ apibrėšime diferencialinėmis lygtimis

$$\begin{cases} \lambda_J^{(1)} \omega^J + \mu_J^{(1)} \omega_1^J = 0, \\ \lambda_J^{(2)} \omega^J + \mu_J^{(2)} \omega_1^J = 0, \end{cases} \tag{1}$$

čia $I, J, \ldots = 2, 3, \ldots, n$. Visos tiesės, einančios per tašką

$$\overrightarrow{M}(t) = \overrightarrow{A} + t\overrightarrow{e_1}$$

ir priklausančios kompleksui $Gr(1,n,2n-4)$, sudaro $(n-2)$-matį kūgį $\Gamma_{n-2}(t)$. Šio $(n-2)$-mačio kūgio $(n-2)$-matė liečiaqmoji plokštuma $T_{M(t)}(\Gamma_{n-2}(t))$ taške $\overrightarrow{M}(t)$ išilgai sudaromosios l yra aprašoma lygtimis

$$\begin{cases} (\mu_J^{(1)} - t\lambda^{(1)J} x^J) = 0, \\ \mu_J^{(2)} - t\lambda_J^{(2)} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Kad būtų paprasčiau, šią $(n-2)$-matę plokštumą žymėsime $\Pi_{n-2}(t)$ ir vadinsime asocijuota taškui $\overrightarrow{M}(t)$. Atitiktį

$$K(l)\colon \; \overrightarrow{M}(t) \leftrightarrow \Pi_{n-2}(t) \tag{3}$$

vadinsime komplekso $Gr(1,n,2n-4)$ pagrindine atitiktimi. Afininės erdvės A_n neholonominiu kompleksu $NGr(1,n,2n-4)$ vadinsime Grasmano daugdarą $Gr(1,n)$ su joje apibrėžtu (3) atitikčių lauku.

Nagrinėsime matricą

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_2^{(1)} & \mu_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \mu_2^{(2)} \\ \lambda_3^{(1)} & \mu_3^{(1)} & \lambda_3^{(2)} & \mu_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{(1)} & \mu_n^{(1)} & \lambda_n^{(2)} & \mu_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Aišku, kad matricos Λ rangas $rg\Lambda$ tenkina nelygybę

$$2 \leqslant rg\Lambda \leqslant 4.$$

1 atvejis. $rg\Lambda = 4$.

Šiuo atveju atitinkamą (1) kompleksą žymėsime ${}^{(4)}Gr(1,n,2n-4)$. Nagrinėjamu atveju iš (2) lygčių išplaukia lygtys $(p,q,\dots=1,2)$

$$\Pi_{n-4}\colon\ \lambda_J^{(p)}x^J = 0,\ \mu_J^{(p)}x^J = 0,$$

apibrėžiančios $(n-4)$-matę plokštumą Π_{n-4}. Visos $(n-2)$-matės plokštumos $\Pi_{n-2}(t)$ gaubia antrosios eilės hiperkūgį K_{n-1}, apibrėžiamą lygtimi

$$K_{n-1}\colon\ \lambda_{IJ}x^Jx^J = 0;$$

čia

$$\lambda_{IJ} = \lambda_I^{(1)}\mu_J^{(2)} - \lambda_I^{(2)}\mu_J^{(1)}.$$

Komplekso ${}^{(4)}Gr(1,n,2n-4)$ diferencialines lygtis galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = a\omega^{n-1} + b\omega^n, \\ \omega_1^3 = c\omega^{n-1} + e\omega^n. \end{cases} \tag{4}$$

Aptariamu atveju

$$\Pi_{n-2}(t)\colon\ \begin{cases} x^2 + t(a\cdot x^{n-1} + b\cdot x^n) = 0, \\ x^3 + t(c\cdot x^{n-1} + e\cdot x^n) = 0. \end{cases}$$

$$K_{n-1}\colon\ x^2(cx^{n-1} + ex^n) - x^3(ax^{n-1} + bx^n) = 0;$$

$$\Pi_{n-4}\colon\ \begin{cases} x^2 = 0, x^3 = 0, ax^{n-1} + bx^n = 0, \\ cx^{n-1} + ex^n = 0. \end{cases}$$

Jei nagrinėsime fiksaciją

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad e = -1,$$

komplekso ${}^{(4)}Gr(1,n,2n-4)$ lygtys atrodys taip:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega^{n-1} = 0, \\ \omega_1^3 + \omega^n = 0; \end{cases}$$

be to,

$$\Pi_{n-2}(t)\colon \begin{cases} x^2 - tx^{n-1} = 0, \\ x^3 - tx^n = 0; \end{cases}$$

$$K_{n-1}\colon\ x^2x^n - x^3x^{n-1} = 0;$$

$$\Pi_{n-4}\colon\ x^3 = 0, \quad x^4 = 0, \quad x^{n-1} = 0, \quad x^n = 0.$$

Matome, kad hiperkūgio K_{n-1} viršūnė yra $(n-4)$-matė plokštuma

$$\Pi_{n-4} = (M, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_4}, \dots, \overrightarrow{e_{n-2}}).$$

Hiperkūgis K_{n-1} turi dvi šeimas sudaromųjų:

$$L^{(1)}_{n-2}(n)\colon\ x^2 - ux^3 = 0,\ x^{n-1} + ux^n = 0;$$

$$L^{(2)}_{n-2}(v)\colon\ x^2 - vx^{n-1} = 0,\ x^3 + vx^n = 0.$$

Afininės erdvės A_n neholonominiu kompleksu ${}^{(4)}NGr(1,n,2n-4)$ vadinsime Grasmano daugdarą $Gr(1,n)$ su joje apibrėžtu atitikčių lauku

$$K(l)\colon\ \overrightarrow{M}(t) = \overrightarrow{A} + t\overrightarrow{e_1} \leftrightarrow \Pi_{n-2}(t)\colon \begin{cases} x^2 - tx^{n-1} = 0, \\ x^3 - tx^n = 0. \end{cases}$$

2 atvejis. $rg\,\Lambda = 3$.

Šiuo atveju atitinkamą (1) kompleksą žymėsime ${}^{(3)}Gr(1,n,2n-4)$. Jo diferencialines lygtis galima užrašyti taip:

$$\omega_1^2 = a\omega^3 + b\omega^4, \omega_1^3 = c\omega^3 + e\omega^4. \tag{5}$$

Tokio komplekso pagrindinė atitiktis atrodo taip:

$$K(l)\colon\ \overrightarrow{M}(t) = \overrightarrow{A} + t\overrightarrow{e_1} \leftrightarrow \Pi_{n-2}(t)\colon\ x^2 + t(ax^3 + bx^4) = 0,\ (1 + c\cdot t)x^3) + t\cdot ex^4 = 0.$$

Matome, kad $n-2$-matės plokštumos $\Pi_{n-2}(t)$ gaubia antrosios eilės hiperkūgį

$$K_{n-1}\colon\ c\cdot x^2x^3 + e\cdot x^2x^4 - bx^3x^4 - a\cdot(x^3)^2 = 0.$$

$(n-2)$-mačių plokštumų $\Pi_{n-2}(t)$ pluošto ašimi yra $(n-3)$-matė plokšuma

$$\Pi_{n-3}\colon\ x^2 = 0,\ x^3 = 0,\ x^4 = 0.$$

Bendruoju atveju komplekso ${}^{(3)}Gr(1,n,2n-4)$ diferencialines lygtis galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega^3 = 0, \\ \omega_1^3 + \omega^4 = 0. \end{cases}$$

Šiuo atveju

$$\Pi_{n-2}(t)\colon \begin{cases} x^2 - tx^3 = 0, \\ x^3 - tx^4 = 0; \end{cases}$$

$$K_{n-1}\colon\ x^2x^4-(x^3)^2=0.$$

Neholonominiu kompleksu ${}^{(3)}NGr(1,n,2n-4)$ vadinsime Grasmano daugdarą $Gr(1,n)$ su joje apibrėžtu atitikčių lauku

$$K(l)\colon\ \overrightarrow{M}(t)=\overrightarrow{A}+t\overrightarrow{e_1}\leftrightarrow\Pi_{n-2}(t)\colon\ \begin{cases}x^2-tx^3=0,\\ x^3-tx^4=0.\end{cases}$$

Dvi $(n-2)$-matės plokštumos $\Pi(t_1)$ ir $\Pi(t_2)$, asocijuotos taškams

$$\overrightarrow{M}(t_1)=\overrightarrow{A}+t_1\overrightarrow{e_1}\quad\text{ir}\quad\overrightarrow{M}(t_2)=\overrightarrow{A}+t_2\overrightarrow{e_1},$$

apibrėžia hiperplokštumą

$$\Pi_3(t_1,t_2)\colon\ x^2-(t_1+t_2)x^3+t_1t_2x^4=0.$$

Vadinasi, atitktis $K(l)$ indukuoja kitą atitiktį

$$\widetilde{K}(l)\colon\ \overrightarrow{M}(t_1)=\overrightarrow{A}+t\overrightarrow{e_1}\leftrightarrow\Pi_{n-1}(t)\colon\ x^2-2tx^3+t^2x^4=0.$$

Hiperkūgio K_{n-1} stacionarumo sąlygos

$$\begin{aligned}
&\theta_{1111}\equiv\omega_4^2=0;\\
&4\theta_{1112}\equiv\omega_3^2-2\omega_4^3=0,\\
&6\theta_{1122}\equiv\omega_2^2-2\omega_3^3+\omega_4^4=0,\\
&4\theta_{1222}\equiv\omega_3^4-2\omega_2^3=0,\\
&\theta_{2222}\equiv\omega_2^4=0;\\
&\Phi_1\equiv\omega_1^2+\omega^3=0,\quad -\Phi_2\equiv\omega_1^3+\omega^4=0;\\
&\varphi_{111}\equiv\omega^2=0,\quad 3\varphi_{112}\equiv\omega_1^1-\omega^3=0;\\
&3\varphi_{122}\equiv\omega^4-2\omega_4^3=0,\quad \varphi_{222}\equiv\omega_1^4-\omega^3=0;\\
&\theta_{a11}\equiv\omega_a^2=0,\quad \theta_{a12}\equiv-\omega_a^3=0,\\
&\theta_{a22}\equiv\omega_a^4=0,\quad (a,b,\ldots=5,\ldots,n)
\end{aligned}$$

sudaro pilnai integruojamą diferencialinių lygčių sistemą. Pažymėkime

$$\begin{aligned}
4\theta_{11}&=4\omega^1-\omega_3^2-2\omega_4^3,\\
4\theta_{12}&=2\omega_1^1-\omega_2^2+2\omega_4^4,\\
4\theta_{22}&=2\omega_2^3+\omega_3^4.
\end{aligned}$$

Dabar neholonominio komplekso ${}^{(3)}NGr(1,n,2n-4)$ diferencialines lygtis galima užrašyti taip $(p_1,p_2,\ldots=1,2)$

$$\theta_{p_1p_2}=\lambda_{p_1p_2I}\omega^I+\mu_{p_1p_2I}\omega_1^I+\lambda_{p_1p_2a}\omega^a+\mu_{p_1p_2a}\omega_1^a,$$

$$\theta_{p_1\dots p_4} = \lambda_{p_1\dots p_4 I}\omega^I + \mu_{p_1\dots p_4 I}\omega_1^I + \lambda_{p_1\dots p_4 a}\omega^a + \mu_{p_1\dots p_4 a}\omega_1^a,$$
$$\theta_{p_1 p_2 a} = \lambda_{p_1 p_2 a I}\omega^I + \mu_{p_1 p_2 a I}\omega_1^I + \lambda_{p_1 p_2 aba}\omega^b + \mu_{p_1 p_2 ab}\omega_1^b.$$

Pirmasis fundamentalusis diferencialinis-geometrinis objektas

$$H^{(1)}({}^3 NGr(1,n,2n-4)) = \{\lambda_{1_1 p_2 I}, \dots, \mu_{p_1 p_2 ab}\}$$

algebriškai panašus į tokį diferencialinį-geometrinį objektą:

$$\begin{aligned}\{&B_{p_1\dots p_7}, B_{p_1\dots p_5}, B_{p_1 p_2 p_3}, B_p,\\ &C_{p_1\dots p_5}, C_{p_1 p_2 p_3}, B_{ap_1\dots p_5},\\ &B_{ap_1 p_2 p_3}, A_{p_1\dots p_5}, A_{ap_1 p_2 p_3}, \widetilde{A}_p,\\ &\widetilde{C}_{ap_1 p_2 p_3}, C_p, A_{ap_1 p_2 p_3}, A_{ap},\\ &E_{ap_1\dots p_5}, E_{ap_1 p_2 p_3}, E_{ap},\\ &C_{ap_1 p_2 p_3}, C_{ap}, E_{aap_1 p_2 p_3}, E_{abp} \quad \}.\end{aligned}$$

Šio objekto komponentės apibrėžia visas geometrines neholonominio komplekso ${}^{(3)}NGr(1,n,2n-4)$ savybes.

3 atvejis. $rg\Lambda = 2$.

Šiuo atveju atitinkamą (1) kompleksą žymėsime ${}^{(2)}Gr(1,n,2n-4)$. Nagrinėjamu atveju kompleksą ${}^{(2)}Gr(1,n,2n-4)$ galima apibrėžti tokiomis diferencialinėmis lygtimis:

$$1)\omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 + \omega^3 = 0; \tag{6}$$

arba

$$2)\omega_1^2 + \omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = 0; \tag{7}$$

arba

$$3)\omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0. \tag{8}$$

Matome, kad tašką $\overrightarrow{M}(t)$ atitinka $(n-2)$-matė plokštuma

$$\Pi_{n-2}\colon \begin{cases} x^2 = 0,\\ x^3 = 0.\end{cases}$$

Mes įrodėme tokią teoremą.

TEOREMA. *Egzistuoja trys neholonominių kompleksų $NGr(1,n,2n-4)$ tipai. Jų diferencialinės lygtys, parinkus judamąjį reperį, yra* (4), (5), *arba* (6)–(8) *pavidalo atitinkamai.*

Šiame darbe detaliai nagrinėjami minėti 3 atvejai, pateikiamos atitinkamos geometrinės interpretacijos, kurių pagalba randami įvairūs algrebriniai paviršiai.

SUMMARY

K. Navickis. Differential geometry of nonholonomic complexes $NGr(1, n, 2n-4)$ ***in*** n***-dimensional affine space***

In this article the differential geometry of the nonholonomic complex $NGr(1, n, 2n-4)$ in the n-dimensional affine space is studied. The classification of such complexes and geometric interpretations are given.

Keywords: affine space, complex, nonholonomic complex.