Liet. matem. rink, **46***, spec. nr.*, 2006, 119–123

Integralas vidurinėje mokykloje

Antanas APYNIS (VU), Juozas ŠINKŪNAS (VPU)
el. paštas: antanas.apynis@maf.vu.lt, sinkunas@vpu.lt

1. Integralų tema tarpukario Lietuvos mokykloje

Nesileisdami į mokymo programų analizę, pasklaidykime tuometinius matematikos vadovėlius ir įsitikinsime, kad jaunimo matematinis ugdymas buvo modernus ir gana aukšto lygio. Lietuvos mokyklose su sustiprintu matematikos ir gamtos mokslų dėstymu buvo mokoma analizinės geometrijos bei matematinės analizės pagrindų. Uždavinynuose galima rasti daug taikomojo pobūdžio probleminių uždavinių.

Apsistokime prie trijų matematikos vadovėlių: 1) J. Stoukaus vadovėlio „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ (Kaunas; 1 leidimas 1925 m., 2 leidimas 1929 m.); 2) dr. A. Juškos vadovėlio „Matematinės analizės pagrindai“ (Kaunas; 1 leidimas 1934 m., 2 leidimas 1941 m.) ir 3) B. Ketarausko vadovėlio „Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pagrindai“ (Kaunas, 1934 m.).

J. Stoukaus vadovėlyje integralinis skaičiavimas yra vadinamas integraline skaičiuote. Ši tema yra suskaidyta taip (kalba netaisyta – aut.): neapibrėžtinio integralo sąvoka, pagrindinės integralo ypatybės, pagrindinių integralinės skaičiuotės formulių lentelė, funkcijų integravimo būdai, integravimas skaidymu, integravimas naujo kintamojo įvedimu, integravimas dalimis, geometrinė integralo reikšmė, apibrėžtinio integralo sąvoka, apibrėžtinis integralas kaip sumos riba, plotų skaičiavimo pavyzdžiai (elipsio plotas, hiperbolinės nuopjovos plotas, parabolinės nuopjovos plotas). Dr. A. Juškos vadovėlyje integralinio skaičiavimo tema pradedama apibrėžtiniu integralu. Toliau dėstoma taip: pagrindinės apibrėžtinio integralo savybės, neapibrėžtinis integralas ir jo išvestinė, pirmykštė funkcija ir jos sąryšis su apibrėžtiniu integralu, elementarinės integravimo formulės, trupmeninių funkcijų integravimas, integravimas pakeičiant argumentą, dalinė integracija, paprastesnių irracionalinių (dabar rašoma „iracionaliųjų“ – aut.) funkcijų integravimas.

B. Ketarausko vadovėlyje integralinis skaičiavimas dėstomas plačiau. Iš pradžių formuluojama neapibrėžtinio integralo sąvoka, aiškinamos šio integralo savybės ir pagrindinės formulės. Visos integravimo taisyklės ir formulės yra tiesiogiai grindžiamos funkcijos diferencialo savybėmis. Kaip ir kituose vadovėliuose čia aiškinami trys integravimo būdai, kurie yra vadinami taip: integravimo skaidymo būdas, kintamųjų pakeitimo būdas, integravimo dalimis, arba dalinio integravimo, būdas. Integravimo tema šiame vadovėlyje yra papildyta kvadratinių iracionalybių (rašoma „irracijonalybių“) integravimu. Aiškinami tokie integralai:

$$1)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+2bx+cx^2}},\ \ c>0,\ \ 2)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+2bx-cx^2}},\ \ c>0,\ \ 3)\ \int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Toliau pereinama prie apibrėžtinio integralo ir jo taikymo temos, kuri dėstoma taip (kalba netaisyta – aut.): apibrėžtinis integralas ir geometriškas jo interpretavimas; teigiamas ir neigiamas plotas, integravimo srities skaidymas; plotų skaičiavimo pavyzdžiai; sukimosi kūno tūris, kai sukimosi ašis sutampa su viena iš koordinatų ašių; kreivių lankų skaičiavimas; sukimosi kūno (sukinio) paviršius, kai sukimo ašis sutampa su viena iš koordinatų ašių; apibrėžtinis integralas yra begalinių mažybių sumos riba.

B. Ketarausko vadovėlio pratarmėje pabrėžiama, kad jis parašytas pagal Švietimo Ministerijos matematikos programą aukštesniajai mokyklai su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu. Sklaidant tarpukario Lietuvos matematikos vadovėlius galima padaryti išvadą, kad diferencialinio ir integralinio skaičiavimo temos turinys per abu dešimtmečius kito nežymiai. J. Stoukaus vadovėlį Švietimo Ministerija patvirtino 1925 metais, o antras jo leidimas 1929 metais buvo išspausdintas be pakeitimų iš pirmojo leidimo. Dr. A. Juškos vadovėlis buvo leidžiamas taip pat du kartus (1934 m. ir 1941 m.). Antrojo leidimo pratarmėje rašoma, kad jis mažai tesiskiria nuo pirmojo leidimo („šiek tiek pataisytas ir priderintas naujausiai programai“).

Tarpukario Lietuvos mokyklose plačiai buvo naudojamas J. Gailevičiaus matematikos uždavinynas (Matematikos uždavinynas VI–VIIItos klasių kursui atkartoti su išleidžiamųjų egzaminų temomis; Kaunas, 1931 m.). Šiame uždavinyne yra aiškinami analizinės geometrijos bei diferencialinio ir integralinio skaičiavimo uždaviniai. Ypač daug dėmesio skiriama taikomojo pobūdžio uždaviniams. Yra daug uždavinių savarankiškam darbui. Šis J. Gailevičiaus uždavinynas įdomus dar ir tuo, kad jo trečiajame skyriuje yra pateikiamos Lietuvos gimnazijų 1929 ir 1930 mokslo metų išleidžiamųjų egzaminų matematikos temos: algebra (119 užd.), trigonometrija (103 užd.), diferencinė skaičiuotė (128 užd.) ir integralinė skaičiuotė (64 užd.). Pateiksime kelis integralų temos uždavinius (kalba netaisyta – aut.):

- Rasti integralas $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{6x+5}{(3x^2+5x+7)^5}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x$, $\int_1^3 \frac{5x^2+3x-2}{x+2}\,\mathrm{d}x$;
- Rasti plotas, apribotas kreivosios $xy=4$, abscisų ašies ir ordinatų $x=2$, $x=3$;
- Rasti sukimo paviršius, jeigu $y=\sqrt{1-x^2}$, $x_1=-1$, $x_2=1$;
- Kreivoji $y=\sqrt{x^2-1}$ sukasi aplink x ašį. Rasti tūris intervale $x_1=2$, $x_2=1$.

Aišku, kad čia pateikta integralų temos apžvalga yra labai paviršutiniška. Vis dėlto ir ji leidžia daryti išvadą, kad tarpukario Lietuvoje jaunimo matematiniu ugdymu buvo rūpinamasi labai rimtai.

2. Šiuolaikinis požiūris į integralinį skaičiavimą Lietuvoje ir kituose Europos kraštuose

Lietuvos vidurinėse mokyklose ir gimnazijose matematikos dabar yra mokoma pagal bendrojo ir išplėstinio kurso programas. Jos skiriasi tiek turinio apimtimi, tiek dėstymo išsamumu. Bendrojo kurso matematikos programoje integralinio skaičiavimo temos nėra. Integralai dėstomi tik išplėstinio kurso programoje. Šios temos turinys toks: „Funkcijų pirmykščių funkcijų radimo taisyklės. Funkcijų neapibrėžtinio ir apibrėžtinio integralo samprata ir sąvoka. Apibrėžtinio integralo radimas. Niutono–Leibnico formulė. Apibrėžtinio integralo taikymai: kreivinės trapecijos ploto radimas; ritinio, kūgio ir rutulio tūrių formulių išvedimas, remiantis sukinio tūrio išraiška apibrėžtiniu integralu". Iš pirmo žvilgsnio ši programa mažai kuo skiriasi nuo tarpukario Lietuvoje dėstyto integralinio skaičiavimo programos. Tačiau šiuolaikinėje mokyklinės matematikos programoje neatsirado vietos funkcijos diferencialo sąvokai. Todėl mokant integruoti iš esmės apsiribojama pointegralinės funkcijos skaidymu ir pagrindinių integralų formulių taikymu. Visai neaiškinamas kintamojo keitimo metodas ir dalinio integravimo (integravimo dalimis) metodas.

Dar kuklesni ir miglotesni gebėjimų standartai, išdėstyti 2006 metų „Matematikos brandos egzaminų programoje". Dalykiniai valstybinio egzamino turinio reikalavimai integralams čia formuluojami taip: „Gebėti rasti paprasčiausių funkcijų pirmykštes funkcijas, mokėti apskaičiuoti paprastus apibrėžtinius integralus ir juos taikyti paprasčiausių kreivinių trapecijų plotams apskaičiuoti paprasčiausiose situacijose".

Danijos gimnazijose matematikos mokoma pagal trijų lygių (A, B ir C) programas. Bazinio lygio, t.y. C lygio programoje nėra nei diferencialinio (taigi ir integralinio) skaičiavimo, nei tikimybių teorijos temų. Šiomis dviem temomis papildyta C programa sudaro B lygio programos turinį. Integralinio skaičiavimo tema yra tik A lygio programoje. Mokoma integralus skaičiuoti ne tik pagal pagrindines formules, bet ir taikant kintamojo keitimo bei dalinio integravimo metodus. Šio lygio matematikos programoje taip pat yra diferencialinių lygčių tema. Vadinasi, integralų taikymo sritis Danijos A lygio programoje gerokai platesnė negu Lietuvos išplėstinio kurso programoje.

Prancūzijos licėjuose matematika dėstoma pagal trijų pagrindinių profilių programas. Humanitarinio profilio licėjuose integralas nedėstomas. Ekonominio profilio licėjuose integralai dėstomi pagal tokią programą: Kreivinės trapecijos plotas. Pirmykštė funkcija ir integralas. Funkcijos vidurinė reikšmė intervale. Integralo savybės: tiesiškumas, teigiamumas, Šalio sąryšis. Programos komentaruose rekomenduojama integralus taikyti sprendžiant ekonominius uždavinius. Pateikiame rekomenduojamų uždavinių iš integralinio skaičiavimo per valstybinį matematikos egzaminą pavyzdį.

Nagrinėjama funkcija $f(x) = 100(2x - 5)\mathrm{e}^{-x}$, $x \in [0; +\infty)$.

A. Funkcijos f tyrimas

1) Raskite funkcijos f ribą, kai $x \to +\infty$. Gautąjį rezultatą iliustruokite grafiškai. Priminsime, kad $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

2) Raskite $f'(x)$; čia f' reiškia funkcijos f išvestinę. Ištirkite $f'(x)$ ženklą ir sudarykite funkcijos f kitimo lentelę.

3) Intervale [2; 8] nubraižykite funkcijos f grafiką C_f (pasirinkite stačiakampę koordinačių sistemą, kurios O_x ašyje ilgio vienetas 2 cm, o O_y ašyje ilgio vienetas – 1 cm).

B. Integralo skaičiavimas

1. Patikrinkite, ar funkcija $F(x) = 100(-2x + 3)\mathrm{e}^{-x}$, $x \in [0; +\infty)$, yra funkcijos f pirmykštė funkcija.

2. Apskaičiuokite $I = \int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. Taikymas

Skaičius $f(x)$ reiškia pelną (tūkstančiais eurų), kurį gamykla gauna pagaminusi x šimtų detalių ($x \in [2;\ 8]$). Pavyzdžiui, gamykla už 300 detalių gauna $100f(3)$ eurų pelną.

1. Naudodamiesi kreive C_f arba A dalies skaičiavimų rezultatais, nustatykite (ir pagrįskite):

a) produkcijos kiekį, kad gamykla nedirbtų nuostolingai;

b) detalių skaičių, kad gamykla gautų didžiausią pelną. Apskaičiuokite ir pelną 1 euro tikslumu; c) detalių skaičių, kad gamyklos pelnas būtų ne mažesnis už 5000 eurų.

2. Kai produkcijos kiekis kinta nuo 300 iki 600 detalių, vidutinis pelnas (tūkstančiais eurų) yra nusakomas funkcijos f vidutine reikšme intervale $[3;\ 6]$. Raskite šį vidutinį pelną 1 euro tikslumu.

Tiksliųjų mokslų profilio licėjų matematikos programa iš esmės skiriasi nuo mūsų šalies gimnazijų matematikos programos. Prancūzijos tiksliųjų mokslų licėjuose dėstoma ir kompleksiniai skaičiai, ir rekurenčiosios sekos, ir tiesinės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais. Ypač daug dėmesio skiriama erdvės geometrijai. Daug platesnė ir integralinio skaičiavimo programa. Ko išmokoma matematinio profilio licėjuose iš integralinio skaičiavimo galima spręsti iš pateikiamo 2006 metų baigiamojo egzamino užduoties fragmento.

A. Nagrinėsime funkciją $f(x) = (20x + 10)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},\quad x \in [0; +\infty)$.

1. Raskite funkcijos f ribą, kai $x \to +\infty$.

2. Ištirkite funkcijos kitimą ir sudarykite funkcijos kitimo lentelę.

3. Įrodykite, kad lygtis $f(x) = 10$ intervale $[0; +\infty)$ turi vienintelį sprendinį. Raskite šį sprendinį 10^{-3} tikslumu.

4. Nubraižykite funkcijos grafiką C (koordinačių sistema orientuota, ilgio vienetas 1cm).

5. Apskaičiuokite integralą $I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. Sakykime, $y(t)$ yra cheminės reakcijos temperatūra laiko momentu t (t matuojama valandomis, y – Celsijaus laipsniais) ir $y(0) = 10$.

Laikysime, kad $y(t)$ yra apibrėžta intervale $[0; +\infty)$ ir yra diferencialinės lygties $y' + \frac{1}{2}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ (E) sprendinys.

1. Patikrinkite, kad A dalies funkcija f yra (E) lygties sprendinys.

2. Reikia įrodyti, kad funkcija f yra vienintelis (E) lygties sprendinys, įgyjantis reikšmę 10 pradiniu momentu 0.

a) Sakykime, funkcija g yra kuris nors (E) lygties sprendinys, tenkinantis sąlygą $g(0) = 10$. Įrodykite, kad $g - f$ yra diferencialinės lygties $y' + \frac{1}{2}y = 0$ (E') sprendinys.

b) Išspręskite (E') lygtį.

c) Išvada.

3. Per kiek laiko šios cheminės reakcijos temperatūra bus lygi pradinei temperatūrai (rezultatą apvalinkite minutės tikslumu).

4. Šios cheminės reakcijos vidutinė temperatūra θ per 3 pirmąsias valandas yra lygi funkcijos f vidutinei reikšmei intervale $[0;\ 3]$. Apskaičiuokite θ reikšmę vieno laipsnio tikslumu.

3. Ar išliks integralas Lietuvos gimnazijoje?

Patirtis rodo, kad alternatyvos valstybiniam egzaminui Lietuvoje nėra. Nagrinėjant rezultatus vis aiškiau matosi tiek mokymo programų, tiek mokymo standartų, tiek paties egzaminavimo spragos ir trūkumai. Žinome, kad Prancūzijoje baigiamasis matematikos darbas teigiamai įvertinamas tik tada, kai laikantysis egzaminą surenka ne mažiau kaip pusę visų galimų taškų. Lietuvoje iki tokio reiklumo laipsnio dar labai toli. Pačios baigiamojo egzamino užduotys Lietuvoje tik iš dalies atitinka baigiamųjų vidurinės mokyklos klasių programą. Daliai uždavinių spręsti (ir gauti teigiamą bendrą įvertinimą) pakanka pagrindinės mokyklos žinių. Integralinio skaičiavimo žinioms patikrinti yra pateikiami labai paprasti uždaviniai. Nežiūrint to Nacionaliniam egzaminų centrui nuolat priekaištaujama, esą tie uždaviniai neprograminiai (suprask, per sunkūs). Dėstymo aukštosiose mokyklose patirtis rodo, kad daugelio studentų mokyklinės žinios ir įgūdžiai iš integralinio ir net diferencialinio skaičiavimo yra gana menki. Todėl nenuostabu, kodėl vis garsiau reiškiama mintis atsisakyti integralų vidurinės mokyklos matematikos programoje. Kita vertus geriausiose gimnazijose matematikos (taigi ir integralų) mokoma ir plačiau, ir giliau negu išdėstyta vadovėliuose. Tačiau laikydami valstybinius egzaminus šie mokiniai neturi galimybės parodyti savo gebėjimus (jie turi spręsti gana elementarius uždavinius). Stebimas ir dar paradoksalesnis dalykas – mokinys, kuris mokosi pagal bendrąją matematikos programą turi teisę (o kartais ja ir pasinaudoja) laikyti matematikos valstybinį egzaminą, kuris vyksta pagal išplėstinę matematikos programą. Tai nuvertina valstybinį matematikos egzaminą. Manytume, kad vidurinėje mokykloje matematikos turėtų būti mokoma pagal trijų lygių programas. Tada labai svarbūs moderniosios matematikos diferencialinio ir integralinio skaičiavimo skyriai daliai mokinių galėtų būti dėstomi ne žemesniu lygiu kaip toliau pažengusiose Europos šalyse arba bent neprasčiau kaip tarpukario Lietuvoje. Visi baigiamieji matematikos egzaminai (trijų lygių) turėtų būti valstybiniai ir vykti tik Nacionaliniame egzaminų centre.

Literatūra

1. *Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos*, Vilnius (1997).
2. *Brandos egzaminų programa. Matematika*, Vilnius, 2003 (atnaujinta 2005 m.).

SUMMARY

A. Apynis, J. Šinkūnas. Integrals at secondary school

Teaching of integrals in Lithuania, Denmark and France is presented. It is suggested to progress to three levels teaching of mathematics.

Keywords: mathematics, programme, curriculum, integral, examination.