Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 151–152

VU studentų matematikos olimpiadai praėjus

Dainius DZINDZALIETA (MII)
el. paštas: dainiusda@yahoo.com

Kiekvienais metais Vilniaus universitetas organizuoja studentų matematikos olimpiadas. Šiemet, iškart po sesijos, būrelis studentų susirinko matematikos ir informatikos fakultete išbandyti savo jėgų. Visiems buvo pateiktos vienodos užduotys. Keturiems uždaviniams keturios valandos, kurių daugeliui dalyvių buvo net per mažai.

Uždaviniams išspręsti užteko žinoti tik pagrindines matematikos sąvokas ir savybes, universitete pateikiamas jau pirmame kurse. Taigi pirmakursis galėjo jaustis tvirtai tarp universiteto užgrūdintų trečiakursių ir ketvirtakursių. Verta paminėti, jog užduotys buvo pateiktos anglų kalba, ja reikėjo rašyti ir sprendimus.

Pateikiame užduotis anglų ir lietuvių kalbomis.

1. *Let n be positive integer exceeding 1. How many permutations $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ of $\{1, 2, \ldots, n\}$ are there which maximize the value of the sum*

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_{i+1} - a_i| + \ldots + |a_n - a_{n-1}|$$

over all permutations? What is the value of this maximum sum?

2. *How many $n \times n$ invertible matrices A are there for which all the entries of both A and A^{-1} are either 0 or 1*?

3. *Let a be a nonzero real number and u and v be real 3-vectors. Solve the equation*

$$2ax + (v \times x) + u = 0$$

for the vector x.

4. *Prove that*

$$\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots.$$

1. *Tegul $n > 1$ yra sveikasis skaičius. Kiek egzistuoja $\{1, 2, \ldots, n\}$ perstatų $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, kurios maksimizuoja sumos*

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_{i+1} - a_i| + \ldots + |a_n - a_{n-1}|$$

reikšmę? Kokia tos maksimalios sumos reikšmė?

2. *Kiek egzistuoja tokių apverčiamų $n \times n$ matricų A, kad tiek A, tiek A^{-1} būtų sudarytos tik iš vienetų ir nulių*?

3. *Tegul a nelygus nuliui realusis skaičius, u, v yra trimačiai vektoriai. Išspręskite lygtį $2ax + (v \times x) + u = 0$ vektoriaus x atžvilgiu.*

4. *Įrodykite, kad*

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots .$$

Išnagrinėkime sunkiausią 4 uždavinį, kurį išsprendė tik vienas antro kurso studentas.

Įdomu, kad tai buvo uždavinys su trumpiausia sąlyga.

Remsimės eilute

$$\mathrm{e}^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

Gerai žinoma, kaip diferencijuoti funkciją $f(x) = x^x$. Panašiai galima ją ir suintegruoti. Taigi

$$x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}. \tag{2}$$

Remiantis (1) ir (2) funkciją $f(x) = x^x$ galima užrašyti taip:

$$x^x = \sum_0^\infty \frac{(x \ln x)^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{x^n \ln^n x}{n!}.$$

Norint pabaigti įrodymą, tereikia įsitikinti, kad

$$\int_0^1 \frac{x^n \ln^n x}{n!} \,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{1}{(n+1)^{n+1}}, \quad \forall n = 1, 2, \dots .$$

Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^n \ln^n x) \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1} \lim_{y \to 0} \int_y^1 \ln^n x \,\mathrm{d}(x^{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} \lim_{y \to 0} \left(\frac{x^{n+1} \ln^n x}{n+1} \bigg|_y^1 - \int_y^1 x^{n+1} \,\mathrm{d}(\ln^n x) \right) \\
&= \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n \ln^{n-1} x \,\mathrm{d}x = \dots = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Panagrinėti kitus uždavinius siūlome patiems.

Geriausiai pasirodę studentai dalyvavo Ostravoje (Čekija) vykusioje tarptautinėje studentų olimpiadoje.

SUMMARY

D. Dzindzalieta. Students' olympiad of Vilnius University

Some problems of the olympiad are considered. One of them is solved.

Keywords: olympiads, questions, series.