Liet. matem. rink, **46***, spec. nr.*, 2006, 153–157

Paprastesnis nepaprastų uždavinių sprendimas – kaip tai vyksta?

Romualdas KAŠUBA (VU)
el. paštas: romualdas.kasuba@maf.vu.lt

Atsakymas į šį klausimą yra įspęstas į du pirmųjų straipsnio pavadinimo žodžių persipynimą. Pradėkime nuo žodžio *paprastesnis*, arba, dar paprasčiau, nuo žodžio *paprastas* ir paklauskime, negi tikrai galima įmanoma paprastai išspręsti nepaprastą arba neprastą uždavinį, ir kas tai apskritai yra?

Uždavinys laikytinas nepaprastu ar neprastu, jeigu jo sprendime yra kažkas naudingo, jame žybteli kažkas netikėto, jo sąlyga sunkiau suvokiama, jo sprendimas painesnis arba reikalauja daug darbo – pavyzdžiu galėtų būti užduotis sužinoti, ar 1 000 000 001 skaitmenį turintis skaičius, kur tarp dviejų kraštinių vienetų įterpta be vieno ištisas milijardas nulių, yra pirminis skaičius, ar nėra? Beje, paminėtas uždavinys kiek panašus į vieną iš tų uždavinių, už kurių sprendimą internete siūlomas milijonas dolerių: raskite pirminį skaičių, turintį 100 milijonų skaitmenų.

Pasižiūrėkime į vieną tokį uždavinį, į kurį vos pažvelgus rodosi būsią daug darbo, rastą slovėniškuose uždavinių rinkiniuose (plg. [1], 5 uždavinys, 7 psl.):

Simboliu $v(X)$ *pažymėkime visų (baigtinės) skaičių aibės elementų sumą (pavyzdžiui,* $v(\{4, 8, 9\}) = 21$).

Raskite visų skaičių $v(X)$ *sumą, jeigu* X *yra kiekvienas galimas aibės* $\{1, 2, 3, \dots, 42\}$ *poaibis.*

Sutarkime visų aibės $\{1, 2, \dots, A\}$ poaibių S sumų $v(S)$ sumą žymėti simboliu $P\{A\}$. Tada $P\{S\} = v(1) + v(2) + v(3) + v(1, 2) + v(1, 3) + v(2, 3) + v(1, 2, 3) = 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 1 + 3 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 = 4(1 + 2 + 3) = 24$.

Šiuo atveju visas menas būtų sugebėti „labai tvarkingai“ suskaičiuoti tą visai nemenką sumą. Tokiais atvejais patartina pažiūrėti, kaip būtų, jeigu mes tą visų sveikųjų skaičių nuo 1 iki 42 ryžtingai sumažintume iki visai nedidelių poaibių $\{1,2,\dots, a\}$, kur a yra *daug* mažesnis už 42. Pradėkime nuo paties mažiausio $a = 1$, Suprantama, kad $P\{1\} = 1$, o $P\{2\} = 6$, ir primename, kad jau esame suskaičiavę, kad $P\{3\} = 24$. Pamėginkime dabar suskaičiuoti $P\{4\}$ jau ne tiesioginiu sumavimu, o samprotaudami taip: į sumą $P\{4\}$ bet kuris aibės $\{1, 2, 3 , 4\}$ elementas, sakysime, 1 įeina tiek kartų, kiek yra tokių aibės $\{1, 2, 3, 4\}$ poaibių, kuriems priklauso 1. Kadangi keturelementė aibė turi $2\times2 \times 2 \times 2 = 16$ skirtingų poaibių, o lygiai pusei iš jų priklauso elementas 1, tai 1 į sumą $P\{4\}$ turi būti įskaitomas 8 kartus, kaip ir kiti aibės $\{1, 2, 3, 4\}$ elementai 2, 3 ir 4.

Vadinasi, sumų suma $P\{4\}$ yra lygi

$$(1+2+3+4)\times 8 = 10\times 8 = 80.$$

Labai „tvarkingas“ $P\{4\}$ suskaičiavimas leidžia mums iš karto suskaičiuoti ne tik $P\{42\}$, bet ir iš karto $P\{n\}$. Kiekvienas aibės $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ aibės a elementas, sakysime, k, į sumą $P\{n\}$ įskaitomas tiek kartų, kiek yra tos aibės poaibių, kuriems jis priklauso. Kadangi n-elementė aibė turi 2^n poaibių, o kiekvienas jos elementas priklauso pusei iš jų, arba 2^{n-1} skirtingiems poaibiams, tai sumų suma $P\{n\}$ yra lygi

$$(1+2+3+\cdots+n)2^{n-1} = \big(n(n+1)\big)2^{n-2}.$$

Atskiru atveju, kai $n = 42$, turime, jog $P\{42\} = (1+2+3+\ldots+42)2^{41} = 21\times 43\times 2^{41}$.

Labai dažnai uždavinys pasidaro visai aiškus, įžvelgus kokią nors smulkmeną, į kurią kitas gal visai ne(at)kreiptų dėmesio, bet užtat spręstų uždavinį daug ilgiau ar net gal visai jo ne(iš)spręstų. Pavyzdžiu imkime tokį „konkretų“ uždavinį (plg. 2 uždavinį 6 psl. iš [1]).

Kiek yra šešiaženklių skaičių $\overline{abcacb}$, kurie dalijasi iš 23?

Žiūrint į $\overline{abcacb}$ pavidalo skaičių, labiausiai matyti, kad jis šešiaženklis, beveik taip aiškiai matoma, kad jame yra tik 3 skirtingi skaitmenys – tai gali sukelti norą tą skaičių „išsluoksniuoti“ užrašant, kad

$$\begin{aligned}\overline{abcacb} &= \overline{a00a00} + \overline{b000b} + \overline{c0c0} = 100100a + 10001b + 1010c\\ &= 23(4352a + 434b + 43c) + (4a + 19b + 21c)\\ &= 23(4352a + 435b + 44c) + 2(2a - 2b - c),\end{aligned}$$

todėl skaičius $\overline{abcacb}$ dalijasi iš 23 kartu su skaičiumi $2(2a - 2b - c)$ arba kartu su skaičiumi $2a - 2b - c$.

Lieka išnagrinėti atvejus, kai $2a - 2b - c = 0$ arba kai $2a = 2b + c$, ir dar kai $2a + 23 = 2b + c$; kitokių atvejų dėl to, kad a, b ir c yra skaitmenys, būti negali.

Iš lygybės $2a = 2b + c$ matome, kad c yra lyginis, o kadangi c – dar ir skaitmuo, tai gauname, kad c gali būti lygus 0, 2, 4, 6 arba 8. Rūšiuodami pagal c gauname 39 atvejus, atvejis 23 + $2a = 2b + c$ prideda dar 3 atvejus, nes (a, b, c) gali būti (1, 8, 9), (1, 9, 7) ir (2, 9, 9), todėl uždavinio atsakymas toks: yra 39 +3 = 42 pavidalo $\overline{abcacb}$ iš 23 besidalijantys skaičiai.

Diofanto uždavinys su daug kvadratų

Išgirdus didelio žmogaus vardu vadinamą uždavinį arba skaitydamas jo sprendimą prisimeni lotynišką posakį „Ex ungae leonem“ – arba – iš letenų atpažįstamas liūtas.

Diofanto uždavinių yra ne vienas, šio uždavinio sąlyga yra nepaini – tik neapsigaukime – neretai paprasta sąlyga gali būti neregėto sudėtingumo sprendimo preliudas. Užtenka prisiminti garsiąją daugelį likimų palenkusią Ferma problemą. Bet grįžkime prie Diofanto ir jo uždavinio sprendimo.

Raskite 3 tokius skirtingus sveikuosius teigiamus skaičius, kad visos įmanomos jų sumos po du, kaip ir jų visų trijų suma, būtų pilnieji kvadratai.

Šio uždavinio sąlyga ([2], 205 psl.) pateikta kaip 100 uždavinys, kartu su kitu gražiu gretimu 101 uždaviniu, irgi yra iš Diofanto "Aritmetikos". Užbėgdami už akių pasakysime, kad grakštus lemiamas sprendimo judesys daromas iš karto, kone pirmuoju sprendimo sakiniu.

Sprendimas. Sakykime, kad A, B ir C yra tokie sveiki teigiami skaičiai, kad $A + B = N^2$ – štai toji, rodytųsi, nežymi gudrybė. Bet pažiūrėkime, kaip natūraliai viskas klostosi toliau. Toliau kalbama štai kas: parinkime $C = 2N + 1$, tada, suprantama, $A + B + C = N^2 + (2N + 1) = (N + 1)^2$. Taigi jau pusė darbo nuveikta, nes $A + B + C$ ir $A + B$ jau pilni kvadratai – liko susitvarkyti su $A + C$ bei $B + C$. O tai jau vyksta greitai, nes toliau imame $B = N^2 - 4N$, o $A = 4N$ (kodėl šitaip?), tada $B + C = (N^2 - 4N) + (2n + 1) = (N - 1)^2$ (dabar aišku). Liko tik susitvarkyti su $A + C = 4N + (2N + 1) = 6N + 1$ buvimu pilnu kvadratu. Tokio pavidalo pilnų kvadratų yra be galo daug. Imdami $6N + 1 = 121 = 11^2$, arba $N = 20$, gauname Diofanto pavyzdį: $A = 80$, $B = 320$, $C = 41$ ir $A + B = 19^2$, $A + B = 20^2$, $B + C = 11^2$, o $A + B + C = 21^2$.

Atsargiau, čia skaičių teorija

Šio perspėjimo amžius matuojamas tūkstantmečiais, o jis aktualus ir šiandien. Žymiam baltarusių uždavinių sudarinėtojui ir sprendėjui prof. Sergejui Mazanikui priklauso toks aforizmas, tinkantis ir Pasaulinių olimpiadų skaičių teorijos uždaviniams: „Vienu sakiniu pasakytas skaičių teorijos uždavinys būna mirtinas".

Neišsigąskime to rimto žodžio net tada, kai žinomas profesorius taip kalba apie tarsi į mokyklinės programos ribas įtelpantį uždavinį, geriau prisiminkime kitą pasakymą apie meistriškumą: „Grėblys samurajus rankose kerta geriau kaip kulkosvaidis".

Pakalbėkime apie vieną tokį 2004 metų Sankt-Peterburgo konkurse keliais variantais siūlytą uždavinį (žr. [3], 41 ir 48 užd.). Pirmiausiai suformuluokime jį ten siūlytu bendriausiu atveju arba taip, kaip jis buvo suformuluotas aštuntokams.

Pasirenkame natūralųjį skaičių n ir lentoje surašome visus natūraliuosius skaičius nuo $900\ldots00$ *iki* $1200\ldots00$ (*n paskutiniųjų abiejų skaičių skaitmenų yra nuliai*). *Kiekvienam skaičiui priskiriame* (*arba „priperšame"*) *kokį nors už tą skaičių mažesnį jo skaičiaus daliklį. Įrodykite, kad kurie nors* 2 *skirtingiems skaičiams priskirti dalikliai bus vienodi.*

Pastabos. Imdami $n = 1$ turėtume imti tarp 90 ir 120 esančius sveikuosius skaičius ir priskirinėti jiems už juos mažesnius jų daliklius. Tokiu atveju užtektų surasti 2 minėtame intervale esančius pirminius skaičius, sakykime, 101 ir 103, ir aišku, kad jiems abiem turėsime „pripiršti" po 1.

Tačiau didėjant n minėtasis intervalas plečiasi ir tolsta nuo mūsų, ir nurodyti konkrečius pirminius skaičius būtų vis sunkiau.

Pavyzdžiui, jeigu $n = 8$, tai esame intervale tarp 900 000 000 ir 1 200 000 000, ir čia jau sunkiau nurodyti 2 pirminius skaičius arba patikėti, kad 1 000 000 007 ir 1 000 000 009 yra pirminiai skaičiai.

O ką daryti su bet kuriuo n? Čia pavyksta taip susamprotauti – kad būtų paprasčiau nagrinėdami iš esmės bendrąjį atvejį naudosime atvejį $n = 1$ atitinkantį intervalą tarp 90 ir 120 ir kalbėsime taip:

Nagrinėkime tokius intervalo [90; 120] skaičius, kurie neturi bendrų daliklių su skaičiumi 6. Tokių skaičių kiekviename šešete yra po 2, arba mūsų atveju tokių skaičių yra 10. Juos visai nesunku išvardinti:

$$91, 95, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 115 \text{ ir } 119.$$

Nagrinėsime tik tuos 10 skaičių, neturinčių bendrų daliklių su 6, ir nagrinėsime jiems priskiriamus už juos mažesnius jų daliklius. Kadangi tie skaičiai bendrų daliklių su 6 neturi, tai nė vienas iš tų 10 skaičių nesidalija nei iš 2, nei iš 3, nei iš 4. Todėl bet kuris jų daliklis, kadangi mažesnis už juos, yra mažiausiai 5 kartus mažesnis. Vadinasi, kiekvienas toks daliklis yra mažesnis už 24. Tačiau tas priskirtas daliklis ne tik mažesnis už 24, bet yra ir bendrų daliklių su 6 neturintis skaičius, o tokių mažesnių už 24 skaičių yra 8.

Taip gavome, kad tiems 10 skaičių yra priskiriamas vienas kuris iš tų 8 skaičių – arba 10 vienokių skaičių yra „superšami“ su 8 kitokiais skaičiais. Tada rasis 2 tokie skaičiai, kuriems yra priskiriamas (arba „priperšamas“) tas pats skaičius. Belieka šiuos samprotavimus pakartoti su „bendruoju n“.

Tinka viskas, kas nors kiek padeda – tik kaip tą viską pastebėti?

Pateikime tokį 2006 metų Airijos konkurso pavyzdį [4], gerai iliustruojantį tai, nuo kokių, rodytųsi, beveik nepastebimų stebimų reiškinių savybių ir ypatybių kartais priklauso didžioji uždavinio sėkmės dalis.

Ar atsiras tokie skaičiai x, y ir z, tinkantys lygčiai

$$z^2 = (x^2 + 1)(y^2 - 1) + n,$$

jeigu (A) $n = 2006$*;* (B) $n = 2007$?

Nepasižiūrėjus atidžiau gali pasirodyti, kad ar n yra 2006, ar vienetu didesnis yra tas pats. Taip gali būti ir dažnai taip esti. Dažnai, bet ne visada. Todėl tokie atvejai yra įdomūs ir jiems dažnai skiriama daugiau dėmesio.

Pasižiūrėkime, kaip bus dabar. Pirmiausiai (A) atveju, kai n yra 2006, lygtį galima perrašyti taip:

$$x^2 - y^2 + z^2 - x^2y^2 = 2005.$$

Mėginsime rasti x ir y tokius, kad $(x - y)(x + y) = 2005$, o juos galima rasti įprastiniu sulyginimo būdu, o z imsime lygų gautųjų x ir y sandaugai. Pastebime, kad $2005 = 1003^2 - 1002^2$, todėl galime imti $x = 1003$, $y = 1002$, tada $z = xy = 1003 \times 1002 = 1005006$ ir tinka trejetas $(x, y, z) = (1003, 1002, 1005006)$.

(B) atveju, kai n yra jau 2007 galėtų pasirodyti, kad didelio skirtumo nebus. Tačiau dabar „ant sumanymų kilnių veto velniškai užriko“ arba viskas priklauso štai nuo ko: *sveikųjų skaičių kvadratai dalijami iš 8 duoda liekanas 0, 1 arba 4. Tačiau reiškinys dešinėje lygties pusėje dalijamas iš 8 duoda visai kitokias liekanas – 2, 5, 6 ir 7. Kadangi skirtingų pusių dalybos iš 8 liekanos yra skirtingos, tai ir lygčiai tinkančių skaičių (B) atveju nėra.*

Minties plėtotė, arba kaip vystosi uždaviniai

Visi žinome tokią absoliučios uždavinių klasikos miniatiūrą apie tai, jog kad ir kokius 6 žmones imtume, tarp paimtųjų atsiras arba tokie 3 žmonės, kad bet kuri jų pora yra pažįstamų žmonių pora, arba tokie 3 žmonės, kad bet kuri jų pora yra nepažįstamų žmonių pora.

Štai viena galima to uždavinio plėtotė.

Įrodykite, kad tarp 35 žmonių visada galima surasti arba tokius 4, kurių kiekviena pora yra pažįstamų žmonių pora, arba tokius 5, kurių kiekviena pora yra nepažįstamų žmonių pora (žr.[5], 21 psl.).

Kartais labai padeda uždavinio sąlygos skaičių mažinimas, tik tai reikia daryti apdairiai, kad neiškreiptume uždavinio proporcijų ir nesugadintume sąlygos intrigos.

Kad ir kaip suskirstytume į 500 nesikertančių rinkinių visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 2000, vis vien kuriame nors rinkinyje atsiras tokie trys skaičiai, kad abiejų mažesniųjų skaičių suma yra didesnė už trečiąjį skaičių (plg. [6], 10.1 uždavinys, 12 psl). O gal taip sakyti būtų vaizdžiau?

Turime 2000 skirtingų atkarpų, kurių visų ilgiai yra skirtingi sveikieji skaičiai nuo 1 iki 2000. Įrodykite, jog kad ir kaip beskirstytume tas atkarpas į 500 rinkinių, vis vien kuriame nors rinkinyje atsiras tokios trys atkarpos, iš kurių galima sudėti trikampį.

O gal ir tai dar per dideli skaičiai? Tada mėginkime mažinti taip:

Turime 200 skirtingo sveiko ilgio atkarpų nuo 1 iki 200. Gal dabar jau būtų pastebimai lengviau įrodyti, jog bet kaip suskirsčius jas į 50 rinkinių, iš 3 kurio nors rinkinio atkarpų „susideda trikampis“?

Ar vis dar per daug? Tada imkime 20 atkarpų vietoj 200 ir skirstykime į 5 rinkinius ir įrodinėkime, kad susideda trikampis. Įmanoma net imti 12 atkarpų ir skirstyti į 3 rinkinius ir net – bet tai jau riba – imti 8 atkarpas, kurių ilgiai yra skirtingi ir sveiki skaičiai nuo 1 iki 8 ir skirstyti jas į 2 dalis. Dabar jau įmanoma viską perrinkti rankomis – su mažesniais skaičiais vis daugiau vilties staiga suvokti uždavinio idėją. Ji reiškiama vienu sakiniu, ir po to jau nebesvarbu, kokio didumo bus tie skaičiai – viskas gausis visais atvejais.

Literatūra

1. *49th National Math Olympiad in Slovenia*, Society of Mathematicians, Physicists and Astronomers of Slovenia, Ljubljana (2005).
2. G. Gleizeris, *Matematikos istorija mokykloje*, Šviesa, Kaunas (1986).
3. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике*, Санкт-Петербург (2004).
4. *Nineteenth Irish Mathematical Olympiad*, Dublin (2006).
5. Zadania z obozów przygotowawczych do zawodów międzynarodowych, Zwardoń 1993–1997.
6. XXXII Всеросийская математическая олимпиада школьников, 2005–2006 учебный год, Задачи окружного и заключительного этапов, Москва (2006).

SUMMARY

R. Kašuba. More simple solution of not so simple problems – how does it happen?

Several non-standard problems are regarded and the possibilities of simple approaching to their solution are regarded and discussed.

Keywords: subsets, divisibility, representations.