Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 167–171

2005 m. Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados uždavinių analizė

Juozas Juvencijus MAČYS (MII)
el. paštas: jmacys@ktl.mii.lt

Straipsnyje pateikiamos LIV Lietuvos moksleivių matematikos olimpiados (Visaginas, 2005–03–31) uždavinių sąlygos, sprendimas bei analizė.

IX–X klasės

1. *Su kuriomis n reikšmėmis skaičių aibę* $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ *galima suskirstyti į tris aibes su vienoda elementų suma*?

Atsakymas. Su visomis reikšmėmis $n = 3k+2$, $n = 3k+3$, $k \in \mathbb{N}$ (t.y. su reikšmėmis $n = 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \ldots$).

Sprendimas. Aišku, kad jei skaičių aibę $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ taip suskirstyti galima, tai $n > 3$ ir suma $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ dalijasi iš 3. Taigi n negali būti pavidalo $3m+1$ ($m \in \mathbb{N}$). Kitaip sakant, n negali būti pavidalo $6k-2$ ir $6k+1$ ($k \in \mathbb{N}$). Įrodysime, kad kitais atvejais, kai 1) $n = 6k-1$, 2) $n = 6k$, 3) $n = 6k+2$ ir 4) $n = 6k+3$, skaičių aibę norimu būdu suskirstyti galima. Priklausomai nuo n pavidalo skaičius grupuokime taip:

1) $\underbrace{1, 2, 3, 4, 5}, \underbrace{6, 7, 8, 9, 10, 11}, \ldots, \underbrace{6k-6, 6k-5, 6k-4, 6k-3, 6k-2, 6k-1}$;

2) $\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6}, \underbrace{7, 8, 9, 10, 11, 12}, \ldots, \underbrace{6k-5, 6k-4, 6k-3, 6k-2, 6k-1, 6k}$;

3) $\underbrace{1, 2, \ldots, 8}, \underbrace{9, 10, 11, \ldots, 14}, \ldots, \underbrace{6k-3, 6k-2, 6k-1, 6k, 6k+1, 6k+2}$;

4) $\underbrace{1, 2, \ldots, 9}, \underbrace{10, 11, \ldots, 15}, \ldots, \underbrace{6k-2, 6k-1, 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3}$.

Kadangi $1+4 = 2+3 = 5$, $1+6 = 2+5 = 3+4$, $1+2+3+4+5 = 6+9 = 7+8$, $1+2+3+6 = 4+8 = 5+7$ bei $(k+1)+(k+6) = (k+2)+(k+5) = (k+3)+(k+4)$, t.y. kiekvieną skaičių grupę galima suskirstyti į tris dalis su vienoda suma, tai kiekvienu atveju aibės skaičius galime suskirstyti į tris aibes su vienoda suma.

Žodžiais šį sprendimą trumpai galima nusakyti taip: iš galo atmetinėjame šešetukus tol, kol aibėje liks 9, 8, 6 arba 5 pirmieji skaičiai, o su jais susitvarkyti mokame.

Kitas būdas. Kadangi $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = n(n+1)/2$, tai jeigu tą aibę galima suskirstyti į tris poaibius su vienoda suma, tai $n > 3$, o ta suma bus $n(n+1)/6$ (ir sveika). Bet vienas iš skaičių n ir $n+1$ yra lyginis, taigi $n(n+1)$ dar turi dalytis iš 3. Todėl arba n dalijasi iš 3, arba $n+1$ dalijasi iš 3, o kitokios reikšmės tikrai netinka.

Vadinasi, reikia ištirti reikšmes $n = 3k+3$ ir $n = 3k+2$ (o $n = 3k+1$ netinka).

Įrodysime, kad kai $n = 3k+2$, tai duotąją aibę padalyti į tris aibes su vienoda suma galima. Tikrai, kai $k = 1$, tai $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\} \cup \{5\}$.

Tai indukcijos bazė. Dabar tarkime, kad aibę su $n = 3k + 2$ jau pavyko suskirstyti į tris su vienoda elementų suma: $\{1, 2, 3, \ldots, 3k + 2\} = A \cup B \cup C$. Reikia parodyti, kad turint 3 naujus skaičius $3k + 3, 3k + 4, 3k + 5$ vėl galima sudaryti tris reikiamas aibes. Iš aibės, turinčios 1, pašaliname tą 1 ir prijungiame prie jos $3k + 5$, prie kitos aibės prijungiame $3k + 4$, o prie trečios prijungiame 1 ir $3k + 3$. Tada visų aibių elementų sumos padidės skaičiumi $3k + 4$, taigi vėl bus lygios.

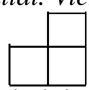
Remiantis matematinės indukcijos principu, aibę, kai $n = 3k + 2$, suskirstyti reikiamu būdu galima.

Panašiai nagrinėjame ir atvejį $n = 3k + 3$. Kai $k = 1$, $n = 6$, aibę nesunku suskirstyti į tris su vienoda elementų suma: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 6\} \cup \{2, 5\} \cup \{3, 4\}$.

Tarkime, kad jau pavyko aibę su $n = 3k + 3$ suskirstyti į tris su vienoda suma: $\{1, 2, 3, \ldots, 3k + 3\} = A \cup B \cup C$.

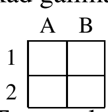
Įrodysime, kad tada galima suskirstyti ir aibę $\{1, 2, 3, \ldots, 3k + 3, 3k + 4, 3k + 5, 3k + 6\}$. Iš aibės, turinčios 1, tą 1 pakeičiame $3k + 6$, tada aibės suma padidės $3k + 5$. Prie kurios nors kitos aibės prijungiame $3k + 5$. Pagaliau prie likusios aibės prijungiame 1 ir $3k + 4$. Kadangi visų aibių suma buvo ta pati, padidėjo tiek pat, tai ir naujųjų aibių sumos lygios.

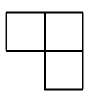
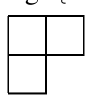
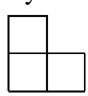
Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas visiems $n = 3k + 3$.

2. *Kvadratinės lentos* 8×8 *kiekvienas vienetinis langelis nuspalvintas arba juodai, arba baltai. Vienu ėjimu lentoje galima pasirinkti bet kaip pasuktą trijų langelių „kampuką“*  *ir kiekvieną jo langelį perdažyti (juodą – baltai, baltą – juodai). Ar galima baigtiniu skaičiumi ėjimų visus langelius nuspalvinti baltai*?

Atsakymas. Galima.

Sprendimas. Įrodysime, kad galima pakeisti vieno konkretaus langelio spalvą, nekeičiant kitų. Aišku, kad tą langelį galima uždengti kvadratu 2×2. Įsitikinkime, kad galima perdažyti bet kurį kvadrato langelį. Pavyzdžiui, perdažykime langelį A1:



. Imkime kampukus , ,  ir juos paeiliui perdažykime. Tuomet langelių A2, B1 ir B2 spalva nepasikeitė, nes juos perdažėme du kartus, o langelį A1 perdažėme tris kartus, todėl jo spalva pasikeitė. Panašiai galime perspalvinti ir bet kurį kitą langelį. Taigi visą lentą nuspalvinti baltai galima.

3. *Stačiojo trikampio ABC statiniai $CA = 3$, $CB = 4$, CD yra trikampio aukštinė. Kampų ABC ir ACD pusiaukampinės kertasi taške M, o kampų BAC ir BCD pusiaukampinės kertasi taške N. Raskite atkarpos MN ilgį.*

Atsakymas. $MN = 1$.

Sprendimas. Pasidarykime brėžinį. Tegul kampo ACD pusiaukampinė yra CE, o kampo BCD pusiaukampinė – CF. Pažymėkime $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Kadangi trikampiai CAD, CDB statieji ir turi su $\triangle ABC$ po bendrą smailųjį kampą, tai $\angle BCD = \alpha$, $\angle ACD = \beta$. Vadinasi, $\angle CMB = 180° - \angle BCM - \angle CBM = 180° - (\alpha + \beta/2) - \beta/2 = 180° - \alpha - \beta = 90°$, ir trikampiai BMC ir BME lygūs pagal bendrą kraštinę ir du kampus prie jos. Vadinasi, $BE = BC (= 4)$ ir $CM = ME$.

Visiškai taip pat įrodome, kad $AF = AC(= 3)$ ir $CN = NF$. Trikampio EFC pagrindas $EF = AB - AE - FB = AB - (AB - BE) - (AB - AF) = BE + AF - AB = 4 + 3 - 5 = 2$, o M ir N – šoninių kraštinių vidurio taškai, todėl jo vidurinė linija $MN = EF/2 = 1$.

4. *Ar yra tokių natūraliųjų skaičių a, b ir c, kad*

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 4242\,?$$

Atsakymas. Ne.

Sprendimas. Kadangi $4242 = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 101$, tai kažkuris pradinės lygybės kairės pusės dauginamasis yra dalus iš 101. Galime laikyti, kad tai yra $a+b$. Tuomet $a+b \geqslant 101$ ir $(b+c)(c+a) \leqslant 42$. Iš paskutinės nelygybės gauname $a < a+c < (b+c)(c+a) \leqslant 42$ ir $b < (b + c)(c + a) \leqslant 42$, o jas sudėję – $a + b < 84$. Tai prieštarauja prielaidai, kad $a + b \geqslant 101$. Vadinasi, tokių natūraliųjų skaičių a, b ir c nėra.

XI–XII klasės

1. *Duoti* 2005 *skaičiai*

$$1^2 \;\; 2^2 \;\; 3^2 \ldots 2005^2$$

Prieš kiekvieną iš jų galima parašyti + arba −. Kokį mažiausią neneigiamą skaičių galima gauti atlikus veiksmus?

Atsakymas. 1.

Sprendimas. Parodysime, kodėl negalime gauti 0, ir parodysime, kaip gauti 1. Kadangi iš duotųjų skaičių 1003 nelyginiai, tai atlikę su jais sudėties ir atimties veiksmus gausime nelyginį skaičių, todėl 0 gauti neįmanoma.

Duotus skaičius suskirstykime į grupes taip: pirmąją grupę tesudaro $1^2, 2^2, \ldots, 13^2$, kitas – aštuoni iš eilės einantys skaičiai, t.y. $(k + 1)$-ąją grupę sudaro $(8k + 6)^2$, $(8k + 7)^2, \ldots, (8k + 13)^2$. Sudėlioję joje ženklus $+ - - + - + + -$ ir atlikę veiksmus, gausime 0:

$$\begin{aligned}(8k + 6)^2 - (8k + 7)^2 - (8k + 8)^2 + (8k + 9)^2 \\ - (8k + 10)^2 + (8k + 11)^2 + (8k + 12)^2 - (8k + 13)^2 = 0.\end{aligned}$$

Dabar pirmoje grupėje reikia sudėlioti ženklus taip, kad rezultatas būtų 1. Tai galima padaryti taip: $-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-7^2+8^2-9^2-10^2+11^2-12^2+13^2 = 1$.

2. Žr. IX–X klasių 2 uždavinį.

3. *Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Taškas M yra lanko AC (kuriam nepriklauso viršūnė B) vidurio taškas, o N yra lanko AB (kuriam nepriklauso viršūnė C) vidurio taškas. Atkarpos MN ir AB kertasi taške K. Įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras yra O. Įrodykite, kad KO yra lygiagreti kraštinei AC.*

Sprendimas. Pasidarome brėžinį. Pirmiausia parodysime, kad taškai B, N, K ir O priklauso vienam apskritimui. BM yra kampo ABC pusiaukampinė, nes taškas M yra lanko AC vidurio taškas. Analogiškai CN yra kampo BCA pusiaukampinė, taigi CN ir BM kertasi taške O. Kampai ONK ir OBK yra lygūs, nes remiasi į lygius lankus CN ir MA. Kadangi atkarpa KO yra matoma vienodais kampais iš taškų N ir B, tai taškai B, N, K ir O priklauso vienam apskritimui.

Dabar parodysime, kad kampai BAC ir BKO yra lygūs, o tai ir reiškia, jog AC yra lygiagreti KO. Kadangi B, N, K ir O priklauso apskritimui $BNKO$, tai kampai OKB ir ONB yra lygūs, nes remiasi į jo lanką OB. Taip pat ir kampai BAC ir BNC lygūs, nes remiasi į lanką BC. Taigi $\angle BAC = \angle BNC = \angle BNO = \angle BKO$.

4. *Skaičių seka $a_0, a_1, a_2, \ldots$ apibrėžiama sąlygomis $a_0 = 1$ ir $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$, $n \geqslant 0$. Įrodykite, kad tokia seka yra vienintelė, ir raskite bendrąjį narį a_n.*

Atsakymas. $a_n = (n+1)(n+2)/2$.

Sprendimas. Pastebėkime, kad mūsų seka didėja: $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} \geqslant a_n$. Taigi $a_n \geqslant a_0 = 1$ su kiekvienu neneigiamuoju sveikuoju n. Todėl $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} \geqslant a_n + \sqrt{2} > a_n$, t.y. seka griežtai didėja.

Dabar lygybes

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_{n+1} + a_n}, \quad a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{a_{n+2} + a_{n+1}}$$

pakėlę kvadratu ir atėmę pirmą iš antros, gauname $a_{n+2}^2 - 2a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) - a_n^2 = a_{n+2} - a_n$, arba $(a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 1) = 0$. Bet kadangi $a_{n+2} - a_n > 0$, tai

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1. \tag{1}$$

Suraskime a_1. Kai $n = 0$, iš sąlygos gauname $a_1 = 1 + \sqrt{a_1 + 1}$, o lygtį išsprendę – $a_1 = 3$. Dabar galime nustatyti kitus sekos narius: $a_2 = 2a_1 - a_0 + 1 = 6$, $a_3 = 2a_2 - a_1 + 1 = 10$, ir t.t. Matome, kad kiekvienas sekos narys nustatomas vienareikšmiškai. Taigi egzistuoja nebent viena seka, tenkinanti uždavinio sąlygas. Atpažinti seką 1, 3, 6, 10, … nesunku – tai sumos $1 + 2 + \cdots + n$. Pirmieji keturi apskaičiuoti nariai tenkina lygybę $a_n = (n+1)(n+2)/2$, todėl pabandykime šį bendrąjį narį patikrinti:

$$\begin{aligned} a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \sqrt{\frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n + 2 = \frac{(n+2)(n+3)}{2} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Taigi ši seka ir yra vienintelė seka, tenkinanti uždavinio sąlygas.

Pravartu žinoti ir kitą būdą – kaip nespėliojant iš (1) sąryšio rasti a_n (pasiskaityti plačiau apie tai galima knygelėje [1]).

Parašykime (1) sąryšį n kartų, keisdami indekso reikšmes:

$$\begin{aligned} &a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1, \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1, \quad \ldots \\ &a_3 = 2a_2 - a_1 + 1, \quad a_2 = 2a_1 - a_0 + 1. \end{aligned}$$

Sudėję šias lygybes ir sutraukę, turime $a_{n+1} = a_n + a_1 - a_0 + n$. Kadangi $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, tai $a_{n+1} = a_n + 2 + n$. Pastarąją lygybę vėl rašome n kartų: $a_{n+1} = a_n + 2 + n$, $a_n = a_{n-1} + 2 + n - 1, \ldots, a_3 = a_2 + 2 + 2$, $a_2 = a_1 + 2 + 1$. Sudėję gauname $a_{n+1} = a_1 + 2n + (1 + 2 + \cdots + n) = 3 + 2n + n(n+1)/2 = (n^2 + 5n + 6)/2 = (n+2)(n+3)/2$. Vadinasi, $a_n = (n+1)(n+2)/2$.

Beje, ruošdamiesi 2006 metų Pasaulio moksleivių matematikos olimpiadai (IMO) Liublianoje, pasirengimo stovykloje Vilniuje Lietuvos komandos nariai nagrinėjo žymiai sunkesnį uždavinį (ką jie sprendė IMO ir kaip pasirodė – žr. [2]) :

Raskite visas sekas, apibrėžiamas sąlygomis $a_0 = 1$ *ir* $(a_{n+1} - a_n)^2 = a_{n+1} + a_n$.

Išspręskime jį. Kadangi

$$a_{n+1} = (2a_n + 1 \pm \sqrt{8a_n + 1})/2, \tag{2}$$

tai nesunku įsitikinti, kad pirmuosius narius galima išreikšti formule $(k-1)k/2$, $k \in \mathbb{N}$ (čia k – visai nebūtinai sekos nario numeris). Bet jeigu $a_n = (k-1)k/2$, tai remiantis (2) formule

$$a_{n+1} = \big((k-1)k + 1 \pm \sqrt{4k^2 - 4k + 1}\big)/2 = \big(k^2 - k + 1 \pm (2k-1)\big)/2,$$

t.y. $a_{n+1} = k(k+1)/2$ arba $a_{n+1} = (k-2)(k-1)/2$.

Taigi atsakymas būtų toks: sąlygą tenkina bet kuri seka, kurios $a_0 = 1$, o kiekvienas sekantis narys yra paskutiniajam gretimas skaičius iš begalinio masyvo

$$\{0, 1, 3, 6, 10, \ldots\}$$

arba 0, jei tas paskutinysis skaičius buvo 0; pavyzdžiui, tokia yra seka 1, 0, 0, 0, 1, 3, 1, 3, 6, ... Kitaip sakant, renkant sekos narius užtenka masyve

$$\{\ldots, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots\}$$

pradėti nuo 1 ir kiekvienu žingsniu eiti į kairę arba į dešinę.

Literatūra

1. А.И. Маркушевич, *Возвратные последовательности*, Москва (1950). Internete: http://lib.chistopol.ru/?id=9895.
   Angliškas vertimas: A.I. Markushevich, *Recursion Sequences*, Mir Publishers, Moscow (1975).
2. International Mathematical Olympiad-2006, Ljubljana.
   http://imo2006.dmfa.si/

SUMMARY

J.J. Mačys. Problems of Lithuanian Mathematical Olympiad-2005

The questions of the Lithuanian olympiad-2005 are presented and solutions are given.

Keywords: olympiads, problems solving, recursion sequences.