Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 295–302

Finansinių aktyvų dinamikos skaitmeninis modelis

Eimutis VALAKEVIČIUS (KTU)
el. paštas: eimval@fmf.ktu.lt

1. Įvadas

Viena iš pagrindinių finansų matematikos problemų yra sukurti pakankamai adekvatų matematinį modelį finansų rinkų aktyvų, tokių kaip, akcijų kainų, akcijų indeksų, palūkanų normų bei valiutų kursų dinamikai analizuoti. Investuotojas, turėdamas aktyvų vertės dinamikos modelį, gali:

- teoriškai įkainoti pasirinkimo, išankstinius ir ateities sandorius bei kitus išvestinius vertybinius popierius,
- įvertinti riziką, susietą su rizikingų vertybinių popierių portfelio turėjimu bei ją valdyti.

Klasikinis būdas aprašyti kainų dinamiką yra kiekvienam aktyvui apibrėžti difuzinį procesą, t.y. stochastinį integralą arba stochastinę diferencialinę lygtį, kai atsitiktinumas yra valdomas Brauno judesio procesu. Labiausiai tikėtina, kad Brauno judesio proceso platus panaudojimas, aprašant finansinių aktyvų kainų dinamiką, susijęs su galimybe gauti analizines raiškas. Paprasčiausių išvestinių vertybinių popierių kainos išreiškiamos per Gauso skirstinį ir lengvai skaičiuojamos.

Deja, pastaraisiais metais vis didesnį dėmesį tyrėjai skiria stochastiniams modeliams, besiskiriantiems nuo klasikinių difuzinių modelių. Empiriniai tyrimai parodė, kad Brauno procesas ne visiškai adekvačiai aprašo kainų atsitiktinį procesą. Apžvelgus užsienio autorių publikacijas [1, 2], buvo išskirtos tokios kainų dinamikos empirinės savybės: skirstiniai turi „sunkias uodegas“, pasitaiko kainų sklaidos klasteriai, retkarčiais būna dideli kainų šuoliai, dažnai nepasitvirtina prielaidos apie Gauso skirtinį, o modelio parametrai dažniausiai nėra pastovūs. Kai kurie autoriai siūlo normalųjį skirstinį pakeisti kitais, labiau tinkančiais skirstiniais. Tokių skirstinių, kurie atspindi asimetriškumą, ekscesą ir kitas savybes pavyzdžiai yra: Gama (Variance Gamma [3]), atvirkštinis Gauso (the Normal Inverse Gaussian [4], CGMY (pavadintas mokslininkų Carr, Geman, Madan and Yor pirmosiomis raidėmis [5]), Hiperbolinis (the Hyperbolic Model [6]) bei Meiksnerio (the Meixner distribution [7]). Naudojant šiuos skirstinius, kuriami Levy procesu pagrįsti modeliai. Tokių modelių pagrindinis trūkumas yra tas, kad jie analitiškai yra pakankamai sudėtingi ir sunkai pritaikomi praktiniams uždaviniams spręsti. Todėl pastaruoju metu kaip alternatyva tokiems modeliams plačiai naudojamas skaitinis modeliavimas (imitavimas), kuris ženkliai suprastina praktinių uždavinių sprendimą.

Kadangi daugelis procesų, kuriais siūloma aprašyti kainų dinamiką, turi Markovo proceso savybių, tai tikslinga kainų kitimą aprašyti Markovo procesu. Šiame straipsnyje pateikti finansinių aktyvų vertės dinamikos modeliavimo algoritmo, pagrįsto Markovo procesu su tolydžiuoju laiku ir skaičia būsenų aibe, pagrindiniai principai.

2. Finansinių aktyvų vertės dinamikos Markovo savybė

Kainų dinamika atspindi atsitiktinį aktyvų vertės kitimą laike. Daugelis autorių [8, 9] mano, kad atsitiktinis kainų elgesys susijęs su efektyviosios rinkos hipoteze (ERH). Ši hipotezė teigia, kad praeities informacija apie finansų rinkas visiškai atsispindi esamosiose finansinių aktyvų kainose ir kad rinkos akimirksniu reaguoja į naują informaciją apie aktyvus. Iš šių prielaidų išplaukia, kad aktyvų kainų atsitiktinį kitimą galima aprašyti Markovo procesu.

Dažnai finansinių rinkų matematinių modelių kūrėjai mano, kad akcijų kainos kinta pagal Markovo procesą. Vertybinių popierių kainų dinamikos modeliavimas, panaudojant šį procesą, yra naudingas dėl to, kad jis pakankamai gerai atspindi tikrąsias akcijų kainas bei Markovo savybė leidžia suprastinti skaičiavimo algoritmus. Jeigu akcijos kaina kinta pagal Markovo procesą, tai jos prognozuojama kaina ateityje nepriklauso nuo kainos prieš savaitę, prieš mėnesį ar prieš metus. Ateities prognozei pakanka žinoti akcijos kainą esamuoju momentu. Busimoji akcijos kaina yra neapibrėžta ir todėl gali būti aprašyta tik tam tikru tikimybiniu skirstiniu. Iš Markovo savybės išplaukia, kad kainos tikimybinis skirstinys tam tikru laiko momentu ateityje nepriklauso nuo to kaip akcijos kaina kito praeityje iki dabarties.

Tarkime, kad akcijos kainų dinamika aprašoma Markovo procesu $S = \{S_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, o jo filtravimą pažymėkime $F = \{F_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ (intuityviai F_t atspindi visą rinkos informaciją iki momento t). Apibrėžkime funkciją f: $E[f(S_T)|F_t] = E[f(S_T)|S_t]$. Tarkime, kad akcijos kainų procesas gali priimti reikšmes iš skaičios būsenų aibės E. Jei $S_t = j \in E$, tai sakysime, kad „procesas yra būsenoje j laiko momentu t“. Dažniausiai būsena laikoma skaliaru, tačiau kartais patogiau laikyti, kad ji yra vektorius. Aktyvų kainų modeliavimas siejasi su naujos informacijos, kuri įtakoja kainas, modeliavimu.

3. Aktyvų kainų dinamikos tikimybių skirstinio konstravimas

Sukursime akcijos kainos dinamikos modelį, aprašomą Markovo procesu su tolydžiuoju laiku ir skaičia būsenų aibe. Norėdami rasti būsenų aibę ir perėjimo tikimybių matricą tarp jų, turime sukonstruoti konkrečios akcijos kainų kilimo ir kritimo skirstinius. Tam, kad procesas būtų Markovo trukmės tarp būsenų pasikeitimo skirstinis turi būti eksponentinis. Paprastai ši sąlyga nėra išpildoma. Nežinomam skirstiniui aproksimuoti panaudosime fiktyvių eksponentinių fazių metodą [10]. Jis leidžia akcijų kainų perėjimo iš vienos būsenos į kitą intensyvumus, t. y. trukmę tarp būsenų pasikeitimo aprašyti tiesine atsitiktinių dydžiu kombinacija. Kainos kitimas aprašomas nuoseklia k fazių, turinčių eksponentinius skirstinius su parametrais μ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, seka. Po j fazės su tikimybe $(1 - a_j)$ ši seka yra paliekama. Tik viena akcijos kaina gali būti fazių struktūroje ir tik vienoje fazėje bet kuriuo laiko momentu.

Tarkime, kad teigiamo atsitiktinio dydžio Z (akcijos kainos perėjimo iš vienos būsenos į kitą trumė) pasiskirstymo funkcija yra $G(z)$. Aproksimuokime $G(z)$ eksponentinių skirstinių sąsukų mišiniu. Tarkime, kad egzistuoja skirstinio $G(z)$ pirmieji trys pradiniai momentai $m_k, k = \overline{1,3}$. Jie gali būti žinomi arba gauti jų statistiniai įverčiai iš stebėtų duomenų. Sukonstruokime kitą atsitiktinį dydį Y tokiu būdu:

$$Y = \begin{cases} Y_1^{(1)} & \text{su tikimybe } p_2; \\ Y_1^{(1)} + Y_2^{(2)} & \text{su tikimybe } p_1 p_2; \\ \ldots & \\ Y_1^{(1)} + Y_2^{(2)} + \ldots + Y_2^{(n)} & \text{su tikimybe } p_1^{n-1} \cdot p_2; \\ \ldots & \end{cases} \tag{1}$$

čia $Y_i^{(j)}$, $i = 1, 2$; $j = \overline{1, n}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su tankio funkcijomis $\mu_i \mathrm{e}^{-\mu_i t}$; $p_1 + p_2 = 1$. Atsitiktinis dydis Y lygus nepriklausomų eksponentiškai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumai su atsitiktiniu dėmenų skaičiumi N, pasiskirsčiusiu pagal geometrinį dėsnį. Šio dydžio tankio funkcija yra [11]

$$f(y) = p_2 \mu_1 \Big(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1} \mathrm{e}^{-\mu_1 y} - \frac{\mu_2 p_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1} \mathrm{e}^{-\mu_2 p_2 y} \Big). \tag{2}$$

Lengva įsitikinti, jei $\mu_1 = \mu_2$, tai atsitiktinio dydžio Y tankio funkcija

$$f(y) = p_2 \mu_2 \mathrm{e}^{-\mu_2 p_2 y}.$$

Apibrėžkime atsitiktinį dydį X tokiu būdu:

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{su tikimybe } p_2, \\ X_1 + X_2 & \text{su tikimybe } p_1, \end{cases} \tag{3}$$

čia X_1 ir X_2 nepriklausomi eksponentiškai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai atitinkamai su parametrais μ_1 ir $p_2 \mu_2$; $p_1 + p_2 = 1$.

TEIGINYS. *Atsitiktinių dydžių X ir Y, apibrėžtų* (3) *ir* (1) *raiškomis, skirstiniai yra vienodi.*

Įrodymas. Parodysime, kad dydžių X ir Y tankio funkcijos sutampa. Pasinaudoję rezultatu, gautu [12], randame atsitiktinio dydžio X tankio funkciją

$$f(x) = \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x} + \frac{p_1 \mu_1}{p_1 \mu_2 - \mu_1} \big(\mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x} - p_2 \mu_2 \mathrm{e}^{-p_2 \mu_2 x} \big).$$

Po algebrinių pertvarkymų gauname tokią raišką:

$$f(x) = p_2 \mu_1 \Big(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1} \mathrm{e}^{-\mu_1 x} - \frac{\mu_2 p_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1} \mathrm{e}^{-p_2 \mu_2 x} \Big). \tag{4}$$

Matome, kad (2) ir (4) išraiškos sutampa.

Pastaba. Atsitiktinis dydis, apibrėžtas (3) raiška, įgalina automatizuoti finansinės sistemos skaitmeninio modelio sudarymą. To neleistų atlikti atsitiktinio dydžio Y raiška, nes eksponentinių fazių skaičius yra neapibrėžtas.

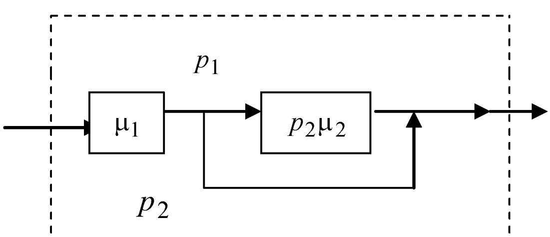
Norėdami aproksimuoti a.d. Z tankio funkciją dydžio X tankiu (4), turime įvertinti nežinomus parametrus μ_1, μ_2, p_1 ir p_2. Tam pakanka sulyginti abiejų atsitiktinių dydžių tris pradinius momentus. Prie gautų lygčių prijungę sąlygą $p_1 + p_2 = 1$, gauname netiesinių lygčių sistemą nežinomiems parametrams suskaičiuoti:

$$\begin{cases} \dfrac{1!\cdot p_2\mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1}\Big(\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1^2} - \dfrac{\mu_2 p_1}{\mu_2^2 p_2^2}\Big) = m_1; \\ \dfrac{2!\cdot p_2\mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1}\Big(\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1^3} - \dfrac{\mu_2 p_1}{\mu_2^3 p_2^3}\Big) = m_2; \\ \dfrac{3!\cdot p_2\mu_1}{\mu_2 p_2 - \mu_1}\Big(\dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1^4} - \dfrac{\mu_2 p_1}{\mu_2^4 p_2^4}\Big) = m_3; \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Lygčių sistemos (5) sprendinys yra toks:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{g_2 - g_1^2}{g_1^3 - 2g_1g_2 + g_3}, \quad g_k = \frac{m_k}{k!}, \quad k = \overline{1,3}; \\ \mu_1 &= \frac{1 + \mu_2 g_1 \pm \sqrt{(1-\mu_2 g_1)^2 + 4a^2(g_2 - g_1^2)}}{2g_1 - 2\mu_2(g_2 - g_1^2)}; \\ p_1 &= \frac{\mu_2(\mu_1 g_1 - 1)}{\mu_2(\mu_1 g_1 - 1) + \mu_1}; \\ p_2 &= \frac{\mu_1}{\mu_2(\mu_1 g_1 - 1) + \mu_1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Eksponentinių fazių grafinė struktūra pavaizduota 1 pav.



1 pav. Dviejų eksponentinių fazių diagrama.

4. Lognormaliojo skirstinio aproksimavimas

Pateiksime lognormaliojo skirstinio aproksimavimo eksponentinių fazių metodu pavyzdį. Tarkime, kad turime lognormalųjį atsitiktinį dydį su tankio funkcija

$$g(x) = \frac{1}{\alpha x\sqrt{2\pi}} \exp\bigl[-(\ln x - \lambda)^2/2\alpha^2\bigr], \quad x > 0, \tag{7}$$

ir parametrais $\alpha = 0.9$, $\lambda = -0.05$. Šio skirstinio pirmieji trys pradiniai momentai lygūs

$$m_1 = 1.42618, \quad m_2 = 4.57225 \text{ ir } m_3 = 28.3606. \tag{8}$$

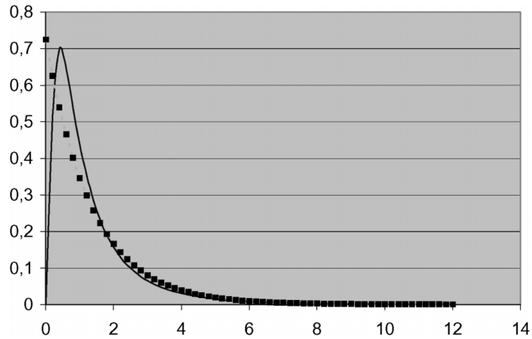
Tankio funkciją (7) aproksimuokime tankio funkcija (4), kurios parametrai, apskaičiuoti iš (6), yra tokie:

$$\mu_1 = 0.75935, \quad \mu_2 = 0.141605, \quad p_1 = 0.00559, \quad p_2 = 0.99441. \tag{9}$$

Kai kurios funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmės ir grafikai pateikti 1 lentelėje ir 2 pav.

1 lentelė

x	$f(x)$	$g(x)$
0,21	0,516021	0,625453
1,01	0,437908	0,346414
2,01	0,156108	0,16609
3,01	0,064918	0,080123
4,01	0,030801	0,039041
5,01	0,0161	0,019329
6,01	0,009053	0,009808
7,01	0,005389	0,00516
8,01	0,003357	0,002852
9,01	0,002172	0,001675
10,01	0,00145	0,001052
12,01	0,000697	0,000498



2 pav. Tikrosios ir aproksimuotos funkcijos grafikai.

5. Kainų būsenos ir perėjimo tikimybių matrica

Šiame skyrelyje bus panaudota įvykių kalba akcijos kainų būsenoms ir perėjimo intensyvumams tarp jų generuoti. Pasinaudodami pasirinktos akcijos istoriniais kainų duomenimis, aproksimuojame kainų didėjimo ir mažėjimo trukmių tankio funkcijas atitinkamai pagal formules

$$f_u(y) = p_1^u \mu_1^u \Bigl(\frac{\mu_2^u - \mu_1^u}{\mu_2^u p_2^u - \mu_1^u} \mathrm{e}^{-\mu_1^u y} - \frac{\mu_2^u p_2^u}{\mu_2^u p_2^u - \mu_1^u} \mathrm{e}^{-\mu_2^u p_2^u y} \Bigr),$$

$$f_d(y) = p_1^d \mu_1^d \Bigl(\frac{\mu_2^d - \mu_1^d}{\mu_2^d p_2^d - \mu_1^d} \mathrm{e}^{-\mu_1^d y} - \frac{\mu_2^d p_2^d}{\mu_2^d p_2^d - \mu_1^d} \mathrm{e}^{-\mu_2^d p_2^d y} \Bigr).$$

Žinant šias tankio funkcijas, galima aprašyti akcijos kainų kitimo dinamiką Markovo grandine su skaičia būsenų aibe ir tolydžiuoju laiku. Šį procesą galima modeliuoti pasinaudojus metodika, aprašyta [13].

Galimų įvykių aibė susideda iš 6 įvykių

$$E = \left\{e_1^u, e_2^u, e_3^u, e_4^u, e_1^d, e_2^d, e_3^d, e_4^d\right\},$$

čia

e_1^u – prasidėjo kainos didėjimas;
e_2^u – baigėsi kainos didėjimo etapas pirmojoje fazėje su tikimybe p_1^u;
e_3^u – baigėsi kainos didėjimo etapas pirmojoje fazėje su tikimybe p_2^u;
e_4^u – baigėsi kainos didėjimo etapas antrojoje fazėje;
e_1^d – prasidėjo kainos mažėjimas;
e_2^d – baigėsi kainos mažėjimo etapas pirmojoje fazėje su tikimybe p_1^d;
e_3^d – baigėsi kainos mažėjimo etapas pirmojoje fazėje su tikimybe p_2^d;
e_4^d – baigėsi kainos mažėjimo etapas antrojoje fazėje.

Perėjimo intensyvumų aibė:

$$Intens = \left\{\mu_1^u, p_2^u\mu_2^u, \mu_1^d, p_2^d\mu_2^d\right\},$$

čia

μ_1^u – intensyvumas, su kuriuo kainos didėjimas baigėsi pirmojoje fazėje;
$\mu_1^u p_2^u$ – intensyvumas, su kuriuo kainos didėjimas baigėsi antrojoje fazėje;
μ_1^d – intensyvumas, su kuriuo kainos mažėjimas baigėsi pirmojoje fazėje;
$\mu_1^d p_2^d$ – intensyvumas, su kuriuo kainos mažėjimas baigėsi antrojoje fazėje.

Apibrėšime kainų būsenų aibę. Tarsime, kad yra žinomos akcijos didžiausioji ir mažiausioji kainos, t.y. visos galimos kainos priklauso atkarpai $[S_{\min}, S_{\max}]$. Jeigu pradinė akcijos kaina yra S_0, tai kitos reikšmės nustatomos iš lygybių

$$S_0 = \frac{S_{\max} + S_{\min}}{2},$$
$$S_k = S_0 + k\Delta, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$S_{-k} = S_0 - k\Delta, \quad k = 1, \dots, n,$$
$$\Delta = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2n},$$

čia n parenkamas laisvai. Tokiu būdu viso yra $2n + 1$ kainos būsenų. Šias kainų būsenas surašysime didėjančia tvarka ir gautąją aibę pažymėsime taip:

$$I = \left\{-n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n\right\}.$$

Modeliuojant akcijų kainų procesą nepakanka žinoti tik galimų kainų aibę, bet reikia žinoti ir kurioje fazėje yra modeliuojama kaina. Todėl galimą būsenų erdvę apibrėšime kaip trimačių vektorių erdvę

$$B = \left\{(b_1, b_2, b_3)\right\}, \quad b_1 \in I,$$

$$b_2 = \begin{cases} 0, & \text{jei akcijos kaina yra pusiausvyroje,} \\ 1, & \text{jei akcijos kaina didėja pirmoje fazėje,} \\ 2, & \text{jei akcijos kaina didėja antroje fazėje;} \end{cases}$$

$$b_3 = \begin{cases} 0, & \text{jei akcijos kaina yra pusiausvyroje,} \\ 3, & \text{jei akcijos kaina mažėja pirmoje fazėje,} \\ 4, & \text{jei akcijos kaina mažėja antroje fazėje.} \end{cases}$$

Norint sugeneruoti galimų būsenų erdvę ir perėjimo intensyvumų matricą, kainų dinamikos procesą reikia aprašyti įvykių kalboje [13]. Dėl ribotos apimties bus pateiktas tik antrojo įvykio aprašymas.

e_2^u: **if** $b_2 = 1$ **and** $b_1 < n$
  then $b_1 \to b_1 + 1; b_2 \to 2$ **end then**
end if
  $Intens \to \mu_1^u p_1$
end e_2^u

Sukurtoji programinė priemonė pagal įvykių aprašymą generuoja galimų būsenų erdvę, perėjimo intensyvumų matricą, sudaro lygčių sistemą stacionarioms Markovo proceso būsenų tikimybėms suskaičiuoti ir jas suranda. Konkrečios akcijos kainos tikimybė suskaičiuojama pagal formulę

$$P(k) = \sum_{b_1, b_2} \pi(k, b_2, b_3), \quad k = -n, \cdots, n,$$

čia $\pi(k, b_2, b_3)$ yra atitinkamos būsenos stacionarioji tikimybė.

6. Išvados

Darbe pateikta metodika kaip nežinomą aktyvų vertės pasikeitimo trukmės skirstinį aproksimuoti fiktyvių eksponentinių fazių mišiniu. Tai leidžia aktyvų dinamikos procesą aprašyti Markovo grandine su skaičia būsenų erdve ir tolydžiuoju laiku. Procesui modeliuoti skaitiniu metodu yra sukurta programinė priemonė, kuri pagal sistemos funkcionavimo aprašymą įvykių kalba sugeneruoja galimų kainų būsenų aibę, perėjimo intensyvumus tarp jų ir būsenų stacionariąsias tikimybes. Žinant akcijų kainų skirstinį, galima įkainoti išvestinius vertybinius popierius bei valdyti vertybinių popierių portfelio riziką. Tolimesnis tyrimo tikslas yra realizuoti sukurtą modeliavimo metodiką su realiais duomenimis.

Literatūra

1. D. Ahn, J. Boudoukh, M. Richardson, R. Whitelaw, Implications from stock index and futures return autocorrelations, *Review of Financial Studies*, **16**, 655–689 (2002).
2. S. Mayhew, Security price dynamics and simulation in financial engineering, in: *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference*, pp. 1568–1574.
3. D.B. Madan, E. Seneta, The VG model for share market returns, *Journal of Business*, **63**, 511–524 (1990).
4. O.E. Barndorff–Nielsen, Normal inverse Gaussian distributions and the modelling of stock returns, *Research Report No. 300*, Department of Theoretical Statistics, Aarhus University (1995).

5. P. Carr, H. Geman, D.H. Madan, M. Yor, The fine structure of asset returns: an empirical ivestigation, *Journal of Business*, **75**, 305–332 (2002).
6. E. Eberlein, U. Keller, Hyberbolic distributions in finance, *Bernoulli*, **1**, 281–299 (1995).
7. B. Grigelionis, Proceses of Meixner type, *Lith. Math. J.*, **39**(1), 33–41 (1999).
8. B. Cuthberston, *Quantative Financial Economics*, John Wieley&Sons, New York (1996).
9. P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press (1997).
10. W. Whitt, On Approximations for aueues, III: Mixtures of exponential distributions, *AT&T ell Labs Tech Journal*, **63**(1), 163–175 (1984).
11. E. Valakevičius, Teigiamo atsitiktinio dydžio skirstinio aproksimavimas eksponentinių skirstinių mišiniu, in: *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai*, II t. (1998), pp. 475–477.
12. E. Valakevičius, Prioritetinės sistemos su eilėmis skaitmeninio modelio aproksimavimas, *Matematika ir matematinis modeliavimas*, 32–36 (1999).
13. H. Pranevičius, E. Valakevičius, *Numerical Models of Systems Specified by Markovian Processes*, Technologija, Kaunas(1996).

SUMMARY

E. Valakevičius. The numerical model of the dynamics of asset prices

In the article is proposed the algorithm how to model the dynamics of asset prices by Markov process with continuous time and countable set of states.

Keywords: dynamics of asset prices, mixture of exponential distributions, Markov numerical model.