Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 333–337

Ribiniai pavojaus skirstiniai tinklinėse sistemose

Juozas AUGUTIS (VDU), Ričardas KRIKŠTOLAITIS (VDU),
Elvyra AUGUTIENĖ (KTK)
el. paštas: j.augutis@if.vdu.lt, r.krikstolaitis@if.vdu.lt, ktk@ktk.lt

1. Įvadas

Pavojus rizikos analizėje yra apibrėžiamas kaip medžiagos, technologinio proceso, informacijos, žmonių veiklos ar kitų reiškinių savybė arba charakteristika, nusakanti potencialią galimybę sukelti grėsmę žmonių gyvybei, sveikatai, gamtai, pastatams, technikai ir pan. Įvairių pavojų sklaidos mechanizmų tyrimų rezultatai yra apibendrinti literatūroje. Plačiausiai yra išnagrinėta įvairių teršalų sklaida ore, vandenyje ar dirvožemyje, užkrečiamųjų ligų plitimas tarp žmonių, gyvūnų ar augalų [1] ir pavojingų medžiagų transportavimas įvairiomis transporto priemonėmis [2, 5]. Minėtuose darbuose detaliai nagrinėjami pavojingų medžiagų ar ligų sukėlėjų sklaidos mechanizmai, greičiai, procesų trukmės ir t.t. Procesai, vykstantys tinklinėse sistemose plačiai išnagrinėti skaičiavimo, masinio aptarnavimo, transporto ir kitose sistemose, tačiau pavojaus sklaidos ir rizikos įvertinimas pradėtas neseniai ir nagrinėjamas tik atskiroms pavojaus rūšims [4, 5, 6]. Šiame darbe gerai žinomas Markovo grandinių matematinė technika pritaikoma įvairių pavojaus tipų sklaidos įvertinimui tinklinėse sistemose.

2. Pavojaus šaltiniai

Pavojaus šaltiniu vadinsime bet kurį sistemos elementą, kuriame gali kilti pavojus. Tinklų sistemose pavojaus šaltiniai dažniausiai sutampa su tinklo viršūnėmis. Galima išskirti du pavojaus šaltinių tipus: momentinį pavojaus šaltinį - tai pavojaus šaltinis, kuriame pavojus atsiranda tik vieną kartą bei pastovų pavojaus šaltinį - tai pavojaus šaltinis, kuriame pavojus kyla periodiškai, be galo daug kartų.

Tinklu šiame darbe laikysime bet kurį orientuotą grafą, kuriame pavojus iš vienos viršūnės vieno ciklo metu gali būti perduotas tik į vieną viršūnę. Ciklas čia suprantamas kaip fiksuotas laiko intervalas, per kurį įvyksta pavojaus perkėlimas iš vienos viršūnės į kitą. Jei pavojus iš kiekvienos viršūnės vieno ciklo metu yra perduodamas į visas viršūnes, kurių srautas nelygus nuliui, tai tokį grafą vadinsime tinklų sistema.

Nagrinėdami pavojaus perdavimo mechanizmą tinklų sistemomis, vartosime pavojaus srauto intensyvumo tinklo linijose koeficiento sąvoką. Koeficientu q_{ij} žymėsime, kokia pavojaus, esančio tinklo viršūnėje i, dalis bus perduota į viršūnę j. Aišku, kad $\sum_{j=1}^{N} q_{ij} \geqslant 1$, kur N žymi tinklo viršūnių skaičių, o $q_{ij} \geqslant 0, \forall i, j$. Tokiu atveju visas srauto intensyvumas į viršūnę j yra $\smile{q}_j = \sum_{i=1,i\neq j}^{N} q_{ij}$, o srauto intensyvumas iš viršūnės j bus lygus $\frown{q}_j = \sum_{k=1,k\neq j}^{N} q_{jk}$.

Pavojų, susikaupusį i-oje viršūnėje po k ciklų, žymėsime $H_i(k)$. Ribiniu pavojumi i-oje viršūnėje laikysime nusistovėjusį pavojų H_i po be galo daug ciklų, t. y. $H_i = \lim_{n\to\infty} H_i(n)$.

3. Ribiniai pavojaus skirstiniai momentinio šaltinio atveju

Nagrinėkime pavojaus skirstinius, kai tinklo viršūnės turi tam tikrą imunitetą, t.y. dalis pavojaus yra sunaikinama, o pavojaus šaltinis yra laikomas momentiniu.

Nagrinėkime tinklą iš N viršūnių ir pavojaus sklaidą per visas linijas vienu metu. Laikykime, kad vienoje viršūnėje nuliniame cikle buvo momentinis pavojaus šaltinis ir sukėlė pavojų H. Kadangi pavojus linijomis perduodamas pastoviai kiekvieno ciklo metu, tai pavojaus stabilumą tinklo viršūnėje i galima aprašyti taip: ateinantis pavojus į viršūnę i turi būti lygus pavojui, kuris iš šios viršūnės perduodamas į kitas viršūnes, t. y. turi būti teisinga lygybė:

$$\sum_{i=1}^{N} H_i\Big(\sum_{j=1}^{N} q_{ij}\Big) = \sum_{j=1,\,j\neq i}^{N} H_j q_{ji}.$$

Prie šios lygčių sistemos turime prijungti dar vieną lygtį:

$$\sum_{i=1}^{N} H_i = H,$$

nes pavojus tinkle neišnyksta ir nedidėja, kadangi šaltinis buvo momentinis. Sujungę šias lygtis į lygčių sistemą ir atlikus tam tikrus prastinimus, rezultatą galima užrašyti matriciniu pavidalu

$$\frown{Q}\vec{H} = B, \tag{1}$$

kur pagrindinė matrica

$$\frown{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ q_{12} & -\frown{q}_2 & q_{32} & \dots q_{N2} \\ q_{13} & q_{23} & -\frown{q}_3 & \dots q_{N3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \dots \\ q_{1N} & q_{2N} & q_{3N} & \dots -\frown{q}_N \end{pmatrix},$$

nežinomųjų stulpelis $\vec{H} = [\,H_1 \dots H_N\,]^T$ ir laisvieji nariai $B = [\,H\ 0 \dots 0\,]^T$.

Kai kuriais atvejais galima užrašyti analitinį šios sistemos sprendinį. Pvz., kai tinkle yra tik vienas kelias iš pirmos viršūnės į n-ąją, tai tiesinės lygčių sistemos pagrindinė matrica supaprastėja:

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ q_{12} & -\widehat{q}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_{23} & -\widehat{q}_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{N-1N} & -\widehat{q}_N \end{pmatrix}.$$

Be to, $\widehat{q}_i = q_{ii+1}$. Tada (1) lygties sprendinys yra tokio pavidalo

$$H_1 = \frac{H}{U}, \quad H_2 = \frac{H \cdot q_{12}}{U \cdot q_{23}}, \dots, H_N = \frac{H \cdot q_{12}}{U},$$

kur $U = (1 + \frac{q_{12}}{q_{23}} + \frac{q_{12}}{q_{34}} + \dots + \frac{q_{12}}{q_{N-1N}} + q_{12})$.

4. Pastovaus šaltinio pavojaus ribinis pasiskirstymas, kai tinklo viršūnės turi imunitetą

Daugelyje realių tinklų sistemų pavojus dalinai arba visiškai likviduojamas per tam tikrą laiką arba ciklų skaičių. Pvz., kompiuteriniuose tinkluose yra diegiamos antivirusinės sistemos, kurios sunaikina didelę dalį virusų, žmogaus imuninė sistema sunaikina ligų virusus, muitinės tarnybos neleidžia laisvai pervežti draudžiamų prekių ir t. t. Aišku, jeigu pavojaus šaltinis tokiose sistemose būtų momentinis (vienkartinis), tai per tam tikrą laiką arba ciklų skaičių sistema pavojų visiškai sunaikintų arba minimizuotų iki nepavojingo lygio. Tačiau realiose sistemose pavojaus šaltiniai dažnai būna neišsemiami, t. y. pastovūs, ir kiekvieno ciklo pradžioje pavojus gali atsinaujinti.

Toliau nagrinėsime tik ribinius pavojaus skirstinius skirtingose tinklų sistemose su pastoviais pavojaus šaltiniais ir viršūnių imunitetais. Tinklo viršūnės i imunitetu vadinsime skaičių I_i $(0 \leqslant I_i \leqslant 1)$, iš kurio padauginame į šią viršūnę patekusį pavojų H. Imunitetas – tai tinklo ar tinklo sistemos savybė sunaikinti arba sumažinti pavojų, kylantį iš kitų viršūnių. Kai $I_i = 1$, pavojus visiškai praleidžiamas, o kai $I_i = 0$, tai visas pavojus, patenkantis į viršūnę i, yra visiškai sunaikinamas. Tarkime, kad pirmoji tinklo viršūnė yra pastovus pavojaus šaltinis, kiekvieno naujo ciklo metu padidinantis pavojų dydžiu H. Pradžioje padarykime prielaidą, kad ribinis pavojaus skirstinys tokiomis sąlygomis egzistuoja, t. y. $\lim\limits_{n\to\infty} H_i(n) = H_i$; čia $i = 1, 2, \dots, N$.

Tada, jeigu kiekvieno ciklo pabaigoje viršūnėje esantis pavojus dauginamas iš imuniteto $0 < I_i \leqslant 1$, o viršūnė, kurioje yra pavojaus šaltinis, imuniteto neturi (tarkime, pirmoji viršūnė), tai ribinis jos pavojus nesikeis, jeigu po kiekvieno ciklo jis bus sumažintas dydžiu H, t. y.

$$H_2 q_{21} + H_3 q_{31} + \dots + H_N q_{N1} = H_1(q_{12} + q_{13} + \dots + q_{1N}) - H.$$

Į antrą viršūnę atėjęs pavojus, padaugintas iš imuniteto I_2, turi būti lygus iš antros viršūnės išeinančiam pavojui:

$$I_2(H_1 q_{12} + H_3 q_{32} + \dots + H_N q_{N2}) = H_2(q_{21} + q_{23} + \dots + q_{2N}).$$

Analogiškai ir kitose viršūnėse:

$$I_j \sum_{i=1, i\neq j}^{N} H_i q_{ij} = H_j \sum_{i=1, i\neq j}^{N} q_{ji}, \quad (j = 2, 3, \ldots, N).$$

Sujungę šias lygtis, gauname tiesinių lygčių sistemą, kurios matricinis pavidalas bus:

$$\tilde{Q}\overline{H} = \overline{B}. \tag{2}$$

Čia pagrindinė sistemos matrica

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} -\overset{\frown}{q}_1 & q_{21} & q_{31} & \cdots & q_{N1} \\ q_{12} & -\overset{\frown}{q}_2/I_2 & q_{32} & \cdots & q_{N2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1N} & q_{2N} & q_{3N} & \cdots & -\overset{\frown}{q}_N/I_N \end{bmatrix},$$

laisvųjų narių stulpelis $\overline{B} = [H\ 0 \ldots 0]^T$, o nežinomųjų stulpelis $\overline{H} = [H_1\ H_2 \ldots H_N]^T$.

Ribinio skirstinio egzistavimo tyrimui pavojaus pasiskirstymą $\vec{H}(n)$ užrašysime iteracine lygtimi. Kadangi turime imunitetą, tai įvedame įstrižainę matricą

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & I_N \end{bmatrix}.$$

Po to lygčių sistemą galima užrašyti taip:

$$[H_1(n+1), H_2(n+1), \ldots, H_N(n+1)] = [H_1(n), H_2(n), \ldots, H_N(n)] \times I \times Q + [H, 0, \ldots, 0];$$

čia $Q = [q_{ij}], i, j = 1, 2, \ldots, N$.

Pažymėję $\vec{H}(n) = [\,H_1(n)\ H_2(n) \ldots H_N(n)\,t]^T$, $\vec{H}(0) = [\,H\ 0 \ldots 0]^T$, gauname, kad

$$\vec{H}(n+1) = \vec{H}(n) \cdot I \cdot Q + \vec{H}(0).$$

Šis iteracinis procesas konverguoja tada ir tik tada, kai matricos IQ visos nuosavos reikšmės moduliu būtų mažesnės už vienetą [3].

5. Išvados

Šiame darbe buvo analizuojami pavojaus sklaidos ir kaupimosi tinklo viršūnėse matematiniai modeliai. Išnagrinėti atvejai, kai tinklo viršūnės turi imunitetą, t.y. gali sumažinti arba visai panaikinti jose esantį pavojų. Pavojaus pasiskirstymui tinklo viršūnėse buvo sudarytos iteracinės lygtys. Ribiniams skirstiniams skaičiuoti darbe sudarytos tiesinių lygčių sistemos.

Literatūra

1. C. Lefevre, P. Picard, An epidemic model with fatal risk, *Mathematical Biosciences*, **117**, 127–145 (1993).
2. G. Purdy, Risk analysis of the transportation of dangerous goos by road and rail, *Journal of Hazardous Materials*, **33**, 229–259.
3. B. Kvedaras, M. Sapagovas, *Skaičiavimo metodai*, Mintis, Vilnius (1974).
4. D. Roeleven, M. Kok, H.L. Stipdonk, W.A. de Vries, Inlan waterway transport: Modelling the probability of accidents, *Safety Science*, **19**, 191–202 (1995).
5. J. Augutis, R. Krikstolaitis, V. Matuzas, E. Uspuras, Risk of oil products transportation in Lithuania, *Proc. of the International Topical Meeting on Probabilistic Safety Analysis PSA*, 05 September 2005, San Francisco, USA ISBN No: o-894448-690-X.P 3- 01-06.
6. *Guidelines for Hazard Evaluation Procedures*, Center for Chemical Process Safety of the American Institute of Chemical Engineers, New York (1992).

SUMMARY

J. Augutis, R. Krikštolaitis, E. Augutienė. Marginal hazard distribution in network structures

The subject of this work is the analysis of hazard distribution in the network systems. In the age when transport flows in the railway and road systems, information flows in the internet channels, etc. intensify, hazard distribution in the network systems becomes a more relevant and important issue. In the paper various theoretical hazard type distributions in the network systems are analysed. Mathematical model of hazard distribution and accumulation in the nodes of the network was created.

Keywords: hazard distribution, network, mathematical model.