Liet. matem. rink, **46***, spec. nr.*, 2006, 371–375

Sistemos su vėlavimais ir struktūros matrica su tikrinėmis reikšmėmis vienetiniame apskritime analizinis tyrimas

Gintarė LEONAITĖ, Jonas RIMAS (KTU)
el. paštas: gintare.leonaite@ktu.lt, jonas.rimas@ktu.lt

1. Įvadas

Siekiant sumažinti informacijos, perduodamos ryšio tinklu, nuostolius būtina sinchronizuoti taktinius generatorius, esančius tinklo komutacijos centruose [1, 2]. Vienas iš galimų tokios sinchronizacijos būdų yra nagrinėjamas šiame darbe.

2. Matematinis modelis

Nagrinėsime valdymo sistemą, sudarytą iš n ($n = 2p+1$, $p \in N$) tarpusavyje sinchronizuotų generatorių, kurios matematinis modelis yra tiesinė matricinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu:

$$Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t-\tau) + z(t), \tag{1}$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius (taikomas apibendrintoms funkcijoms) [3], $x(t)$ – ieškoma vektorinė funkcija, $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų, τ – pastovus vėlavimas, $B_1 = -\kappa E$, κ – koeficientas, E – vienetinė n-tosios eilės matrica, $B_2 = \kappa B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \; 1 \\ 1 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Matrica B nusako sistemos vidinių ryšių struktūrą. Kadangi galioja sąlyga $B^TB = BB^T = E$ (čia T – simbolis, žymintis transponavimo operaciją), tai matrica B yra ortogonalioji [4]. Tokios matricos visos tikrinės reikšmės yra kompleksiniai skaičiai, vaizduojami taškais kompleksinės plokštumos vienetiniame apskritime.

3. Matricinės diferencialinės lygties sprendimas

(1) diferencialinę lygtį sprendžiame „žingsnių“ metodu [2]. Tuo tikslu intervalą $0 \leqslant t < +\infty$ dalijame į vienodo ilgio τ dalis. Kiekviename intervale $k\tau \leqslant t < (k+1)\tau$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ (1) lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą diferencialinę lygtį (be vėluojančio argumento). k-jame intervale gautas sprendinys yra pradinė sąlyga (pradinė funkcija), sprendžiant lygtį $k+1$-jame intervale $(k = 0, 1, 2, ...)$. Pritaikę šį metodą ir panaudoję Laplaso transformaciją, gauname (1) matricinės diferencialinės lygties sprendinį:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^{L} (A^{-1} B_2 e^{-p\tau})^k A^{-1} Z(p), \quad 0 \leqslant t < (L+1)\tau; \tag{3}$$

čia $A = pE - B_1 = (p+\kappa)E$, $A^{-1} = \frac{1}{p+\kappa}E$, $Z(p) \div z(t)$, $\div$ operatorinės lygybės simbolis, siejantis pirmavaizdį ir jo vaizdą, $L = 0, 1, 2, \ldots$.

Panaudoję (2) pažymėjimą, turime:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^{L} \frac{\kappa^k e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} B^k Z(p), \quad 0 \leqslant t < (L+1)\tau. \tag{4}$$

4. Matricos *B* *k*-tojo laipsnio radimas

Matricos B (žr. (2) ir (4)) k-tąjį laipsnį $(k \in N)$, rasime remdamiesi išraiška $B^k = TJ^kT^{-1}$ [4]; čia J – matricos B Žordano forma, T – transformuojančioji matrica. Matricas J ir T rasime, jei žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{5}$$

Pažymėkime

$$D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & & & & & & 0 \\ & \alpha & 1 & & & & & \\ & & \alpha & 1 & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \alpha & 1 & \\ & & & & & & \alpha & 1 \\ 1 & & & & & & & \alpha \end{vmatrix}; \tag{6}$$

čia $\alpha \in R$. Tada

$$|B - \lambda E| = D_n(-\lambda). \tag{7}$$

Iš (6) išplaukia:

$$D_n(\alpha) = \alpha^n + (-1)^{n+1}$$

ir

$$|B - \lambda E| = (-\lambda)^n + (-1)^{n+1}. \tag{8}$$

Įvertinę (8), randame charakteristinės lygties (5) šaknis (matricos B tikrines reikšmes):

$$\lambda_k = -e^{\frac{i(2k-2)\pi}{n}}, \quad k = \overline{1, n}; \tag{9}$$

čia $n(n = 2p + 1,\ p \in N)$ – matricos B eilė.

Matricos B tikrinės reikšmės yra paprastosios (ne kartotinės), todėl jos Žordano forma J yra diagonalioji matrica

$$J = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n), \tag{10}$$

o transformuojančiosios matricos T stulpeliai yra matricos B tikriniai vektoriai [4]. Rasime matricą T. Pažymėję jos v-tąjį stulpelį $T_v (v = \overline{1, n})$, turime $T = (T_1\ T_2\ \ldots\ T_n)$ ir $(BT_1\ BT_2\ \ldots\ BT_n) = (T_1\lambda_1\ T_2\lambda_2\ \ldots\ T_n\lambda_n)$. Iš pastarosios lygybės gauname:

$$BT_v = T_v\lambda_v, \quad v = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Išsprendę n tiesinių algebrinių lygčių sistemų, apibrėžtų (11) išraiška, randame matricos B tikrinius vektorius

$$T_v = \begin{pmatrix} E_0(\lambda_v) \\ E_1(\lambda_v) \\ \vdots \\ E_{n-1}(\lambda_v) \end{pmatrix}, \quad v = \overline{1, n}; \tag{12}$$

čia

$$E_k(z) = z^k, \quad (k \in N \text{ ir } z \in C). \tag{13}$$

Remdamiesi (12) lygybėmis, parašome transformuojančiąją matricą T ir randame jai atvirkštinę matricą T^{-1}:

$$T = \begin{pmatrix} E_0(\lambda_1) & E_0(\lambda_2) & \ldots & E_0(\lambda_n) \\ E_1(\lambda_1) & E_1(\lambda_2) & \ldots & E_1(\lambda_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_{n-1}(\lambda_1) & E_{n-1}(\lambda_2) & \ldots & E_{n-1}(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} E_0(\overline{\lambda}_1) & E_1(\overline{\lambda}_2) & \ldots & E_{n-1}(\overline{\lambda}_1) \\ E_0(\overline{\lambda}_2) & E_1(\overline{\lambda}_2) & \ldots & E_{n-1}(\overline{\lambda}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_0(\overline{\lambda}_n) & E_1(\overline{\lambda}_n) & \ldots & E_{n-1}(\overline{\lambda}_n) \end{pmatrix}$$

čia $\overline{\lambda}_k\ (k = \overline{1, n})$ – kompleksinis jungtinis kompleksiniam skaičiui $\lambda_k\ (k = \overline{1, n})$.

Randame matricos B k-tojo laipsnio ($k \in N$) uv-tąjį elementą:

$$\{B^k\}_{uv} = \{TJ^kT^{-1}\}_{uv} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^k E_{u-1}(\lambda_l)E_{v-1}(\overline{\lambda_l}), \quad u, v = \overline{1, n}.$$

Įvertinę (13) lygybę, gauname

$$\{B^k\}_{uv} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^k\lambda_l^{u-1}(\overline{\lambda}_l)^{v-1} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^{k+u-v}, \quad u, v = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Panaudoję (9) lygybę ir sąryšį $\lambda_k = \overline{\lambda}_{n-k+1}$ $\left(k = \overline{1, \frac{n-1}{2}}\right)$, (14) išraišką parašome realiojoje formoje:

$$\{B^k\}_{uv} = \frac{1}{n}\left[1 + (-1)^{k+u-v} \cdot 2\sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{(k+u-v)(2l-1)\pi}{n}\right], \quad u, v = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Matrica B ir jos laipsniai yra cirkuliantinės matricos [4], todėl jos k-tąjį laipsnį galima parašyti taip:

$$B^k = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_n & \cdots & a_1 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

čia

$$a_v(k) = \{B^k\}_{1v}n = 1 + (-1)^{k-v+1}2\sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{(k-v+1)(2l-1)\pi}{n}, \quad v = \overline{1, n}. \tag{17}$$

5. Pereinamųjų funkcijų matrica

Sistemos u-tojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į v-tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį vadinsime sistemos pereinamąja funkcija $h_{uv}(t)(u, v = \overline{1, n})$. Matricą $h(t) = (h_{uv}(t))$ vadinsime sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica. Šios matricos elementus rasime pasinaudoję (1) matricinės diferencialinės lygties (4) sprendiniu.

Kai vienetinis fazės šuolis veikia v-ojo generatoriaus virpesio fazę, (1) lygties laisvasis narys įgauna pokytį:

$$\Delta z(t) = \delta(t)I^{(v)}; \tag{18}$$

čia $I^{(v)}$ – matrica-stulpelis, kurio v-asis elementas lygus 1, o likusieji – nuliui, $\delta(t)$ – delta funkcija.

Remiantis (4) ir (18) išraiškomis, gauname

$$h(t) = (h_{uv}(t)) \div \sum_{k=0}^{L} \frac{\kappa^k e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} B^k, \quad 0 \leqslant t < (L+1)\tau. \tag{19}$$

Įstatę (16) į (19) ir gautai išraiškai pritaikę atvirkštinę Laplaso transformaciją, randame:

$$h(t) = \begin{pmatrix} \alpha + h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_n \\ h_n & \alpha + h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} \\ h_{n-1} & h_n & \alpha + h_1 & \cdots & h_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \cdots & \alpha + h_1 \end{pmatrix}; \tag{20}$$

čia $\alpha = e^{-\kappa t} 1(t)$,

$$h_v(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L} \frac{\kappa^k (t-k\tau)^k e^{-\kappa(t-k\tau)}}{k!} a_v(k) 1(t-k\tau),$$
$$0 \leqslant t < (L+1)\tau, \ v = \overline{1,n}; \tag{21}$$

$1(t) = \begin{cases} 1, \ t \geqslant 0, \\ 0, \ t < 0, \end{cases}$ Hevisaido vienetinė funkcija, $a_v(k)$ – funkcija, apibrėžta (17) išraiška.

Gautoji pereinamųjų funkcijų matricos $h(t)$ (20) išraiška gali būti panaudota tiriant pereinamuosius procesus sinchronizacijos sistemoje, analizuojant jos darbą nusistovėjusiame režime, skaičiuojant statistines charakteristikas.

Literatūra

1. W.C. Lindsey, J.H. Chen, Mutual clock synchronization in global digital communication networks, *Euro. Trans. Telecommun.*, **7**(1), 25–37 (1996).
2. J. Rimas, Tarpusavio sinchronizacijos sistemos dinamikos tyrimas, *Radiotechnika*, **32**(2), 3–9 (1977).
3. P. Antosik, J. Mikusinskij, R. Sikorskij, *Apibendrintų funkcijų teorija*, Mir (1976) (rusų kalba).
4. R. Horn, Ch. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (1986).

SUMMARY

Gintarė Leonaitė, Jonas Rimas (KTU). Analytical investigation of the delay system with structural matrix having eigenvalues on the unit circle

Investigation of the mutual synchronizatin system with delays, composed of n $(n = 2p+1, \ p \in N)$ oscillators joined into a onedirectional ring, is carried out. The investigation is based on the use of eigenvectors of the matrix, which describes the structure of the internal links of the system.

Keywords: eigenvalues, eigenvectors, Jordan's form, delay systems.