Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 418–423

Dinaminio slopintuvo taikymas netiesinėms sistemoms su apribojimu

Genovaitė ZAKSIENĖ (KTU)
el. paštas: genovaite.zaksiene@ktu.lt

Technologinių procesų sparta, sudėtingos aparatūros taikymas padidina nepageidaujamų mechaninių poveikių įtaką mechanizmams. Įrenginių vibroaktyvumo sumažinimas pasiekiamas keičiant fizinių – mechaninių, kartais ir cheminių procesų parametrus, mažinant tarpelius kinematinėse porose, atliekant mašinų rotorių dinaminį balansavimą ir inercijos jėgų išsvėrimą. Vienas iš būdų kovoti su žalingais virpesiais yra dinaminių slopintuvų taikymas mechaninėms sistemoms, kai nekeičiama sistemos konstrukcija ir žadinimo šaltinio panaikinti negalima. Nagrinėjamos įvairios netiesinės sistemos, kurių tamprumo jėgos dalimis tiesinės. Tokios sistemos tiriamos nuoseklaus sujungimo, harmoninės linearizacijos, harmoninio balanso ir kitais metodais [2].

Taikant dinaminius slopintuvus netiesinėms sistemoms labai svarbu nustatyti sistemos parametrų reikšmes, su kuriomis toks slopintuvas veikia efektyviausiai. Jei pagrindinę masę m veikianti jėga iššaukia pavojingai dideles virpesių amplitudes, tai prijungus dinaminį slopintuvą, t. y. papildomą masę m_1, ir parinkus tamprumo parametrą c_1, galima žymiai sumažinti amplitudę.

Tegu dinaminė sistema aprašoma diferencialinėmis lygtimis.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + f(x) - c_1(x_1 - x) = A\sin\omega t, \\ m_1\ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

čia x, x_1 – koordinatės atskaitomos nuo sistemos statinės pusiausvyros padėties, m_1, c_1 – tiesinio dinaminio slopintuvo parametrai, m – pagrindinė sistemos masė, $f(x)$ – nagrinėjamos dviejų tipų netiesinės standumo jėgos:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & |x| \leqslant x_y, \\ (c + c_0)x - c_0 x_y \operatorname{sgn} x, & |x| > x_y; \end{cases} \tag{2}$$

ir

$$f(x) = \begin{cases} cx, & |x| \leqslant x_y, \\ (c + c_0)x - c_0 x_y \operatorname{sgn} x, & x_y < |x| \leqslant x_z, \ . \\ (c + c_0 + c_2)x - c_0 x_y \operatorname{sgn} x - c_2 x_z \operatorname{sgn} x, & |x| > x_z; \end{cases} \tag{3}$$

čia x_y, x_z – sistemos judesio apribojimai; c, c_0, c_1, c_2 – standumo charakteristikų parametrai.

Sistemai (1) spręsti taikomas harmoninės linearizacijos metodas. Netiesinės standumo charakteristikos (2, 3) ištiesinamos, panaudojant lygtį

$$f(x) = qx. \tag{4}$$

Tuomet sistemos (1) sprendiniai bus:

$$\begin{aligned} x &= \beta \sin \omega t, \\ x_1 &= \beta_1 \sin \omega t. \end{aligned} \tag{5}$$

Ištiesintos standumo charakteristikos koeficientas q apskaičiuojamas taip [2]:

$$q(\beta) = \frac{4}{\pi\beta} \int_0^{2\pi} f(\beta \sin \tau) \sin \tau \, \mathrm{d}\tau = \frac{4}{\pi\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta \sin \tau) \sin \tau \, \mathrm{d}\tau; \tag{6}$$

čia $\tau = \omega t$.

Kai standumo jėga $f(x)$ turi pavidalą (2), koeficientas q apskaičiuojamas taip:

$$\begin{aligned} q(\beta) &= \frac{4}{\pi\beta} \int_0^{\tau_1} c\beta \cdot \sin^2 \tau \, \mathrm{d}\tau + \frac{4}{\pi\beta} \int_{\tau}^{\frac{\pi}{2}} \big((c + c_0)\big(\beta \sin \tau - x_y\big) + c x_y\big) \cdot \sin \tau \, \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{4c}{\pi} \Big(\frac{\tau}{2}\Big|_0^{\tau_1} - \frac{1}{4} \sin 2\tau \Big|_0^{\tau_1}\Big) + \frac{4(c + c_0)}{\pi} \Big(\frac{\tau}{2}\Big|_{\tau_1}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2\tau \Big|_{\tau_1}^{\frac{\pi}{2}}\Big) + \frac{4(c + c_0)}{\pi\beta} \cos \tau \Big|_{\tau_1}^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \frac{4c x_y}{\pi\beta} \cos \tau \Big|_{\tau_1}^{\frac{\pi}{2}} = (c + c_0) - \frac{2c_0}{\pi}\left(\arcsin \frac{x_y}{\beta} + \frac{x_y}{\beta}\sqrt{1 - \Big(\frac{x_y}{\beta}\Big)^2}\right); \end{aligned}$$

čia $\tau_1 = \arcsin \frac{x_y}{\beta}$.

Antruoju atveju, kai $f(x)$ turi pavidalą (2), koeficientas q apskaičiuojamas taip:

$$\begin{aligned} q(\beta) &= \frac{4}{\pi\beta}\Big(\int_0^{\tau_1} c\beta \cdot \sin^2 \tau \, \mathrm{d}\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \big((c + c_0)\beta \sin \tau - x_y c_0\big) \cdot \sin \tau \, \mathrm{d}\tau\Big) \\ &\quad + \frac{4}{\pi\beta}\Big(\int_{\tau_2}^{\frac{\pi}{2}} \big((c + c_0 + c_2)\beta \sin \tau - x_z c_2 - x_y c_0\big) \cdot \sin \tau \, \mathrm{d}\tau\Big) \\ &= (c + c_0 + c_2) + \frac{6c_0 x_y}{\pi\beta}\sqrt{1 - \Big(\frac{x_y}{\beta}\Big)^2} + \frac{2c_0}{\pi} \arcsin \frac{x_y}{\beta} - \frac{2c_2 x_z}{\pi\beta}\sqrt{1 - \Big(\frac{x_z}{\beta}\Big)^2} \\ &\quad - \frac{2c_2}{\pi} \arcsin \frac{x_z}{\beta} - \frac{8c_0 x_y}{\pi\beta}\sqrt{1 - \Big(\frac{x_z}{\beta}\Big)^2}; \end{aligned} \tag{7}$$

čia $\tau_1 = \arcsin \frac{x_y}{\beta}$, $\tau_2 = \arcsin \frac{x_z}{\beta}$.

Įrašę į (1) sistemą sprendinio (5) išraiškas ir ištiesintą standumo charakteristiką, lygčių sistemą pertvarkome į sistemą

$$\begin{cases} -m\omega^2\beta + q\beta - c_1(\beta_1 - \beta) = A, \\ -m_1\omega^2\beta_1 + c_1(\beta_1 - \beta) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Dinaminio slopintuvo amplitudę randame iš (8) sistemos antrosios lygties:

$$\beta_1 = \frac{c_1\beta}{c_1 - m_1\omega^2} = \frac{\omega_1^2\beta}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Pagrindinės masės amplitudė β, įrašius β_1 išraišką į (8) sistemos pirmą lygtį, bus tokia:

$$\frac{\beta c_1}{A} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\Bigl(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1}\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}\Bigr)}; \tag{9}$$

čia $\mu = \frac{m_1}{m}$, $\omega_1^2 = \frac{c_1}{m_1}$.

Pertvarkius (9) lygtį, gaunama amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminiu slopintuvu:

$$\frac{\beta c_1}{A} = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2\Bigl(-\frac{1}{\mu}(1-\gamma^2) + \frac{q}{c_1}\frac{1}{\gamma^2}(1-\gamma^2) - 1\Bigr)}; \tag{10}$$

čia $\gamma = \frac{\omega}{\omega_1}$.

Iš (10) lygties išplaukia, kad $\beta \to 0$, kai $\gamma \to 1$.

Atitinkamai parinkus dinaminio slopintuvo parametrus, kai $\frac{c_1}{m_1} = \omega_1^2 \to \omega^2$, pagrindinės masės virpesiai sistemoje nuslopinami. Bedimensėse koordinatėse amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminiu slopintuvu bus tokia:

$$\alpha\gamma^2\Bigl(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1}\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2}\Bigr) - \frac{A}{c_1 x_y} = 0, \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{x_y};$$

čia koeficientas q įgyja (6) arba (7) išraiškas.

Bedimensėse koordinatėse amplitudinė dažninė charakteristika be dinaminio slopintuvo gaunama iš lygties

$$m\ddot{x} + qx = A\sin\omega t,$$

įrašius į ją $x = \beta\sin\omega t$:

$$-m\omega^2\beta + q\beta = A,$$

$$\frac{\beta}{x_y}\Bigl(\frac{q}{c} - \gamma_1^2\Bigr) = \frac{A}{cx_y}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{\omega_2}, \quad \omega_2^2 = \frac{c}{m}.$$

Standumo charakteristika be dinaminio slopintuvo bedimensėse koordinatėse atrodys taip:

$$\alpha\Big(\frac{q}{c}-\gamma_1^2\Big)=\frac{A}{x_y c},\tag{12}$$

čia $\alpha=\frac{\beta}{x_y}$.

Perėjus prie ribos, kai $\alpha\to\infty$, iš amplitudinių dažnininių charakteristikų (11) su dinaminiu slopintuvu abiem $q(\alpha)$ atvejais gaunamos lygtys rezonansiniams dažniams nustatyti:

$$\alpha=\frac{\frac{A}{c_1x_y}}{\Big(-\frac{1}{\mu}\gamma^2+\Big(\frac{c+c_0}{c_1}-\frac{2c_0}{c_1\pi}\Big(\arcsin\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\Big)\Big)-\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\Big)},\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\alpha=\frac{A}{x_yc}:\Big(&-\frac{\gamma^2}{\mu}+\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+\frac{6c_0}{\pi c_1\alpha}\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}+\frac{2c_0}{c_1\pi}\arcsin\frac{1}{\alpha}\\&-\frac{2c_2x_z}{\pi c_1x_y\alpha}\sqrt{1-\Big(\frac{x_z}{x_y\alpha}\Big)^2}-\frac{2c_2}{c_1\pi}\arcsin\frac{x_z}{x_y\alpha}-\frac{8c_0}{\pi c_1\alpha}\cdot\sqrt{1-\Big(\frac{x_z}{x_y\alpha}\Big)^2}-\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\Big),\end{aligned}\tag{14}$$

$$-\frac{\gamma^2}{\mu}+\frac{c+c_0+c_2}{c_1}-\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}=0,\tag{15}$$

kai $q(\alpha)$ įgyja išraišką (7) ir analogiška lygtis, kai $q(\alpha)$ įgyja išraišką (6)

$$-\frac{\gamma^2}{\mu}+\frac{c+c_0}{c_1}-\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}=0.\tag{16}$$

Toliau detaliau bus nagrinėjama (15) išraiška. Analogiškos išvados galioja ir (16) lygties atveju. Iš (15) lygties išplaukia, kad sistema turės rezonansinius virpesius, kai

$$\gamma_{1,2}^2=\frac{1+\mu\Big(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}\Big)\pm\sqrt{\Big(1+\mu\Big(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\Big)\Big)^2-\frac{4\mu(c+c_0+c_2)}{c_1}}}{2}.$$

Sąlyga, kad diskriminantas būtų neneigiamas tikrai išpildyta, nes

$$\begin{aligned}&\Big(1+\mu\Big(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\Big)\Big)^2-\frac{4\mu(c+c_0+c_2)}{c_1}\\&\quad=\Big(1-\mu\Big(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\Big)\Big)^2+4\mu\geqslant0,\quad \mu=\frac{m_1}{m}>0.\end{aligned}$$

Atstumas tarp rezonansų Δ lygus:

$$\Delta = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \sqrt{\Big(1 - \mu\Big(\frac{c + c_0 + c_2}{c_1} + 1\Big)\Big)^2 + 4\mu}.$$

Ieškosim funkcijos $\Delta(\mu)$ ekstremumo:

$$\Delta'(u) = \frac{\mu\Big(\frac{c+c_0+c_2}{c_1} + 1\Big)^2 + 1 - \frac{c+c_0+c_2}{c_1}}{\sqrt{\Big(1 - \mu\Big(\frac{c+c_0+c_2}{c_1} + 1\Big)\Big)^2 + 4\mu}}.$$

Mažiausias dažnio diapazonas, kuriame masės m virpesiai ženkliai sumažinami bus, kai $\mu = \frac{c_1(c+c_0+c_2-c_1)}{(c+c_0+c_2+c_1)^2}$.

Tuomet dinaminio slopintuvo parametrai tenkina sąlygą $\frac{c_1}{m_1} = \frac{c+c_0+c_2+c_1}{m(c+c_0+c_2-c_1)}$, o minimali dinaminio slopintuvo dažnio veikimo juosta lygi:

$$\min \Delta = \frac{2\sqrt{c_1(c + c_0 + c_2)}}{c + c_0 + c_2 + c_1}.$$

Žinoma [2], kad tiesiniu atveju dinaminio slopintuvo dažnio veikimo juosta lygi $\Delta = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \sqrt{\mu^2 + 4\mu}$. Netiesinėse sistemose dažnio veikimo juosta bus platesnė negu tiesinėse sistemose, kai

$$\Big(1 - \mu\Big(\frac{c + c_0 + c_2}{c_1} + 1\Big)\Big)^2 > \mu^2.$$

Išsprendus nelygybę gaunama sritis, kurioje dinaminis slopintuvas yra efektyvesnis negu tiesiniu atveju.

Ši sritis apibūdinama sąlygomis:

$$\mu > \frac{c_1}{c + c_0 + c_2} \quad \text{arba} \quad 0 < \mu < \frac{c_1}{c + c_0 + c_2 + 2c_1}.$$

Srityje, kai $\frac{c_1}{c+c_0+c_2+2c_1} < \mu < \frac{c_1}{c+c_0+c_2}$, dinaminio slopintuvo veikimo dažnio juosta jau yra siauresnė negu tiesinėse sistemose.

Išvados

1. Tiriant dalimis tiesinę sistemą nustatyta, kad ne visuomet netiesinėse sistemose dinaminio slopintuvo veikimo dažnio zona yra platesnė negu tiesinėse sistemose.
2. Surastos netiesinės sistemos parametrų kitimo sritys, kuriose dinaminis slopintuvas yra efektyvesnis negu tiesinėse sistemose.
3. Dinaminio slopintuvo dažnis visais atvejais turi būti artimas žadinimo dažniui.

Literatūra

1. V. Nainys, G. Zaksienė, Suppression of mechanical oscillations in a nonlinear system, in: *The 6th International Conference Environmental Engineering*, **1**, May 26–27, Vilnius (2005), pp. 185–190.
2. D.W. Jordan, P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University press (2003).
3. L. Pust, O. Szollos, Forced irregular oscillations of two degrees of freedom nonlinear systems, in: *2nd European Nonlinear Oscillations Conference*, Prague, September 9–19 (1996).

SUMMARY

G. Zaksienė. Supression of mechanical oscillations in a nonlinear systems with restriction

The application of the dynamical dampers in the mechanical systems, when the sources of stimulation are impossible to abolish, is one of the ways to fight against the harmful vibrations. The linear dynamical damper of nonlinear systems can compensate the force of stimulation in wide diapason of frequency. The parameters of dynamical system where dynamical damper exists more effectively are determined.

Keywords: nonlinear system, damper, suppression.