Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 442–444

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio asimptotika

Arvydas JOKIMAITIS (KTU)
el. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt

1. Įvadas

Tarkime, kad $X_1, X_2, ..., X_n, \ldots$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir tankiu $p(x)$. Sudarysime n pirmųjų sekos narių variacinę eilutę:

$$X_{1:n} \leqslant ... \leqslant X_{n:n}.$$

Didžiausią variacinės eilutės narį vadinsime maksimumu ir žymėsime Z_n. Kai k yra fiksuotas, o $n \to \infty$, pozicinę statistiką $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k-tuoju maksimumu.

Pažymėkime

$$u_n(x) = n\big(1 - F(a_n + b_n x)\big);$$

čia $\{a_n, n \geqslant 1\}$ ir $\{b_n > 0,\ n \geqslant 1\}$ – centravimo ir normavimo konstantų sekos. Tarkime, kad skirstinio funkcija $F(x)$ yra tokia, jog

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) > 0. \tag{1}$$

Tada (žr. [6])

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \tag{2}$$

visuose funkcijos H tolydumo taškuose; čia H – neišsigimusi skirstinio funkcija. Be to, $H(x) = \mathrm{e}^{-u(x)}$. Jei tenkinama (2) lygybė, sakysime, kad skirstinio funkcija F priklauso ribinio skirstinio H traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$).

[1] darbe parodyta, kad egzistuoja trys ribinio skirstinio H tipai:

$$H_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad , \quad x > 0,\ \alpha > 0;$$
$$H_{2,\alpha}(x) = \exp\big(-(-x)^{\alpha}\big), \quad x \leqslant 0,\ \ \alpha > 0;$$
$$H_{3,0}(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x}), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Pažymėkime,

$$p_{Z_n}(x) = n b_n\, p(a_n + b_n x) F^{n-1}(a_n + b_n x),$$

čia $p_{Z_n}(x)$ – atsitiktinio dydžio $(Z_n - a_n)/b_n$ tankis.

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinio funkcija F, kad tiesiškai normuoto maksimumo tankis $p_{Z_n}(x)$konverguotų į ribinio skirstinio H tankį $H'(x)$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x). \tag{3}$$

1 TEOREMA. *Jei $F \in D(H))$ ir*

a) $H = H_{1,\alpha}$, *tai* (3) *sąryšis bus teisingas intervale* $(0; \infty)$ *tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(x)$ yra teigiama su pakankamai dideliais x, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(x)}{1 - F(x)} = \alpha;$$

b) $H = H_{2,\alpha}$, *tai* (3) *sąryšis bus teisingas intervale* $(-\infty; 0)$ *tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(x)$ yra teigiama, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{(\omega(F) - x)p(x)}{1 - F(x)} = \alpha,$$

čia $\omega(F) = \sup\{x\colon\ F(x) < 1\}$;

c) $H = H_{3,0}$, *tai* (3) *sąryšis bus teisingas su visais x tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga*

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{p(x)\int_x^{\omega(F)}(1 - F(t))\,\mathrm{d}t}{(1 - F(x))^2} = 1.$$

Teoremos įrodymas pateiktas [4] darbe.

2 TEOREMA. *Tiesiškai normuotas k-tasis maksimumas turi neišsigimusį ribinį skirstinį $H_{(k)}(x)$ tada ir tik tada, kai galioja* (2) *lygybė. Be to su visais x, tokiais, kad* $0 < u(x) < \infty$, *galioja lygybė*

$$H_{(k)}(x) = H(x)\sum_{t=0}^{k-1} \frac{(u(x))^t}{t!}. \tag{4}$$

2 teoremos įrodymas pateiktas [6] darbe.

Šiame darbe rasime tiesiškai normuoto k-tojo maksimumo tankio ribinį tankį. Pažymėsime, kad maksimumo tankio lokalinės teoremos yra gautos [2], [4], [5] darbuose, o k-tųjų ekstremaliųjų reikšmių bei pozicinių statistikų problematika bene plačiausiai yra apžvelgta [3] darbe.

2. Pagrindinis rezultatas

Tiesiškai normuoto k-tojo maksimumo ribinio skirstinio $H_{(k)}(x)$ tankį pažymėkime $h_{(k)}(x)$. Tada diferencijuodami gauname

$$h_{(k)}(x) = H'_{(k)}(x) = H'(x)\frac{(u(x))^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Tiesiškai normuoto k-tojo maksimumo skirstinio tankį pažymėkime $p_{X_{n-k+1:n}}(x)$.

3 TEOREMA. *Tarkime, tenkinama* (4) *lygybė. Jei tenkinamos* 1 *teoremoje pateiktos sąlygos, tai*

$$\lim_{n\to\infty} p_{X_{n-k+1:n}}(x) = h_{(k)}(x).$$

Įrodymas. [3] darbe parodyta, kad

$$p_{X_{n-k+1:n}}(x) = n! b_n p(a_n + b_n x) \frac{F^{n-k}(a_n + b_n x)(1 - F(a_n + b_n x))^{k-1}}{(n-k)!(k-1)!}.$$

Atlikę elementarius pertvarkymus, gauname

$$p_{X_{n-k+1:n}}(x) = n b_n p(a_n + b_n x) F^{n-1}(a_n + b_n x)$$
$$\times \frac{(n(1 - F(a_n + b_n x)))^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} \cdot \frac{1}{F^{k-1}(a_n + b_n x)}.$$

Panaudoję įvestus pažymėjimus, gauname

$$p_{X_{n-k+1:n}}(x) = p_{Z_n}(x) \frac{(u_n(x))^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{F^{k-1}(a_n + b_n x)}.$$

Perėję prie ribos, kai k yra fiksuotas, o $n \to \infty$, bei atsižvelgę į (1) ir (3) lygybes ir tai, kad $F(a_n + b_n) \to 1$, gauname

$$\lim_{n\to\infty} p_{X_{n-k+1:n}}(x) = H'(x) \frac{(u(x))^{k-1}}{(k-1)!} = h_{(k)}(x).$$

Teorema įrodyta.

Literatūra

1. B. Gnedenko, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. Math.*, **44**, 423–453 (1943).
2. L. de Haan, S.I. Resnick, Local limit theorems for sample extremes, *Ann. Probab.*, **10**, 396–413 (1982).
3. R.-D. Reiss, *Approximate Distributions of Order Statistics*, Springer, New York (1989).
4. S.I. Resnick, *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Springer, New York (1987).
5. T.J. Sweeting, On domains of uniform local attraction in extreme value theory, *Ann. Probab.*, **13**, 196–205 (1985).
6. Я. Голамбош, *Ассимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Наука, Москва (1984).

SUMMARY

A. Jokimaitis. The asymptotic of the density of the kth maxima of independent random variables

In this paper the local limit theorem for density of k-th maxima of independent identically distributed random variables is proved.

Keywords: extreme values, local limit theorems, order statistics.