*Liet. matem. rink.*, **44**, *spec. nr.*, 2004, 35–39

# Tikimybių teorijos ir kombinatorikos dėstymas vidurinėje mokykloje

Eugenijus STANKUS (VU)
el. paštas: eugenijus.stankus@maf.vu.lt

Praėjo jau 10 metų nuo kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos elementų įvedimo į vidurinės mokyklos kursą. Tuomet buvo diskutuojama, ar šis kursas apskritai reikalingas vidurinėje mokykloje. Tačiau nulėmė kitų šalių patirtis bei stipri Lietuvos tikimybininkų mokykla – ir tikimybių teorijos elementai buvo įtraukti į vidurinės mokyklos programą. Praėjus dešimčiai metų jau galima patyrinėti, kokia padėtis su tikimybių teorijos dėstymu vidurinėse mokyklose, ar nagrinėjamų temų sąrašas pakito lyginant su pradiniu programos variantu. Be to, apžvelgsime, kokius uždavinius sprendė abiturientai valstybiniuose egzaminuose. Taip pat panagrinėsime sunkumų, kylančių įsisavinant tikimybių teorijos sąvokas ir teiginius, priežastis.

Atrodo, kad matematikos mokytojams šio kurso dėstymas dabar kelia mažiau problemų negu pirmaisiais tikimybių teorijos įvedimo metais – tai teigia ir patys mokytojai. Tačiau mokiniams tikimybių teorijos kursas tebėra sudėtingas kaip ir anksčiau. Tai matosi iš ateinančių studijuoti į universitetus ir kolegijas. Jiems vėl ir vėl tenka aiškinti tikimybių teorijos sąvokas, demonstruoti jas įvairiausiais pavyzdžiais, sieti jas su taikomojo pobūdžio uždaviniais. Susidaro įspūdis, kad mes nuo mokyklinio kurso nelabai nutolome (bent jau kolegijose). Tad kokios tikimybių teorijos sunkaus suvokimo priežastys? Manau, kad ne tik savaitinių valandų skaičiuje, kuris, žinoma, taip pat labai svarbus. Ko gero, pagrindinės sunkaus tikimybių teorijos įsisavinimo priežastys slypi pačioje tikimybių teorijoje, nes tai gana abstrakti mokyklinio matematikos kurso dalis.

Pirmiausia mokiniai turėtų gerai suvokti bandymo, baigčių ir įvykio sąvokas. Tikimybių teorija modeliuoja bet kuriuos įvykius – tiek susijusius su žmogaus gyvenimu, tiek su ekonominiais bei pasaulyje vykstančiais reiškiniais. Todėl bandymo (eksperimento) sąvoka tikimybių teorijoje labai plati – ji apima ne tik patį nagrinėjamąjį reiškinį, bet ir sąlygas, kuriose šis reiškinys vyksta. Baigčių aibę sudaro atvejų, kuriais gali užsibaigti bandymas, aibė. Tuomet iš baigčių, sudarant įvairius jų rinkinius, galima konstruoti įvykius. Svarbu, kad sąvokos būtų pateikiamos ne formaliai, o nagrinėjant nesudėtingus pavyzdžius.

Gerai nesuvokus pradinių sąvokų, sunkiai suprantamos tolesnės – įvykio tikimybės ir atsitiktinio dydžio. Čia vėl įvykio tikimybę geriau įvesti pasitelkiant pavyzdžius, iš kurių matytųsi, kaip apskritai galima vertinti įvykio įvykimo galimybę. Įvedant įvykio tikimybės sąvoką svarbu ją susieti su įvykio santykinio dažnio stabilumu. Nors klasikinis tikimybės apibrėžimas gana paprastas, tačiau suvokti ir paaiškinti baigčių vienodą galimumą ne taip lengva. Čia vėl iškyla nemažai problemų.

Dar sunkiau sekasi su atsitiktiniu dydžiu, nors ši sąvoka labai svarbi – juk atsitiktinis dydis yra gyvenime sutinkamų daugelio dydžių, pavyzdžiui, ekonominių rodiklių, biometrinių matavimų ir kitų, matematinis modelis. Todėl šiems klausimams XII klasės vadovėlyje skirtas atskiras skyrelis, kuriame gvildenama atsitiktinio dydžio samprata – nagrinėjamos įvairios baigčių funkcijos, apibrėžiančios atsitiktinius dydžius.

Pastebima, kad mokiniai statistikos elementus įsisavina žymiai lengviau negu tikimybių teorijos sąvokas. Jie lengvai suvokia įvykio santykinį dažnį, statistinių duomenų vaizdavimo būdus, be didelių problemų pagal formules apskaičiuoja imties skaitines charakteristikas, netgi koreliacijos koeficientą. Blogiau, kad šių dalykų jie visai nesusieja su atitinkamomis tikimybių teorijos sąvokomis. Iš tikrųjų tik tikimybių teorijos teiginių dėka galime būti garantuoti, kad tirdami kokį nors dydį ir apskaičiavę, pavyzdžiui, šio dydžio imties vidurkį, mes gausime skaičių, kuris nėra labai nutolęs nuo tiriamo dydžio tikrojo vidurkio.

Žvilgterėkime į patį pirmąjį programos variantą. Įdomu, kad didžiąją dalį temų, pasiūlytų šiame variante, rasime ir dabartinėse programose bei vadovėliuose. Kursas apima pagrindines tikimybių teorijos sąvokas, jų interpretacijas, matematinės statistikos elementus. Šiuo metu siauriau beplėtojama kombinatorika – naudojamos tik pačios būtiniausios formulės, kurios reikalingos skaičiuojant tikimybes. Anksčiau mėgstami uždaviniai, pavyzdžiui, lygčių, į kurias įeina gretinių, kėlinių ar derinių skaičiai su nežinomaisiais, dabar nebepopuliarūs. Naujuosiuose vadovėliuose daugiau dėmesio skiriama tikimybių skaičiavimui. Sprendžiami ir paprastesni uždaviniai, – kai tikimybei apskaičiuoti tereikia paprastų kombinatorikos formulių, ir sudėtingesni – pavyzdžiui, klaidžiojimo tinkleliu uždaviniai.

Pateikiame 1994 metais pasiūlytą tikimybių teorijos ir statistikos pradmenų programą.

Elementarūs kombinatoriniai uždaviniai. Kombinatorinė daugybos ir sudėties taisyklė. Sudėtiniai kombinatoriniai uždaviniai. Kėliniai, faktorialas. Gretiniai, deriniai, jų skaičiaus radimo formulės. Paskalio trikampis. Niutono binomo formulė. Atsitiktinio įvykio sąvoka. Atsitiktinių įvykių pavyzdžiai. Paprastas eksperimento su atsitiktinėmis baigtimis modelis. Elementarusis įvykis. Įvykiui palankus elementarusis įvykis. Įvykio tikimybės apibrėžimas, kai elementarieji įvykiai vienodai galimi (klasikinis tikimybės apibrėžimas). Būtinasis, negalimasis, priešingasis įvykiai. Įvykio tikimybės apibrėžimas, kai elementarieji įvykiai nebūtinai vienodai galimi. Elementarūs uždaviniai įvykio tikimybei rasti. [Įvykio tikimybės pagrindinės savybės. Nesutaikomi įvykiai, jų sąjungos (sumos) tikimybė. Nepriklausomi įvykiai. Sąlyginė tikimybė.]

Atsitiktinio dydžio sąvoka, pavyzdžiai. Atsitiktinio dydžio skirstinys, matematinė viltis (matematinis vidurkis), dispersija.

Statistinių tyrimų samprata ir taikymo sritys. Imtis. Imties grafinis vaizdavimas, diagrama, histograma. Skaitinės imties charakteristikos: vidurkis, centras, plotis, dispersija, vidutinis kvadratinis nuokrypis. [Įvykio dažnis ir tikimybė.] Normaliojo skirstinio sąvoka. [Įvykio tikimybės radimas remiantis statistiniais duomenimis ir normaliojo skirstinio lentelėmis.]

Dauguma įeinančių į pateiktąją programą klausimų buvo įtraukta į vėlesnių metų mokyklines programas ir išliko dabartinėse programose bei brandos egzaminų reikalavimuose. Visas kursas buvo išdėstytas per kelerius metus pradedant VIII (o dabar ir ankstesnėmis) ir baigiant XII klase. Štai Švietimo ir mokslo ministerijos patvirtinta (2000 08 01) bendrojo lavinimo mokyklos programa.

VIII klasė. STATISTIKA. Statistinių duomenų pateikimo būdai. Imtis. Imties vidurkis. Mediana. Didžiausias ir mažiausias imties duomenys. Imties plotis. Duomenų grupavimas. Bandymai ir jų baigtys. Įvykiui palankios baigtys. Būtinasis, negalimasis įvykiai. Įvykių tikėtinumas.

IX klasė. TIKIMYBĖ. KOMBINATORIKA. STATISTIKA. Klasikinė įvykio tikimybė. Tikimybės savybės: būtinojo, negalimojo įvykio tikimybė. Galimybių medis. Kombinatorinė daugybos taisyklė. Požymių koreliacija.

X klasė. KOMBINATORIKOS ELEMENTAI. Kombinatorinės sudėties ir daugybos taisyklės. Kėliniai, gretiniai, deriniai, jų skaičiaus radimo formulės.

XI klasė. KOMBINATORIKA. Galimybių medis, kombinatorinės daugybos ir sudėties taisyklės, $n$ objektų išrinkimas eilės tvarka, kėlinių, gretinių ir derinių sąvokos bei jų skaičių radimo formulės (skaičiaus faktorialas), Paskalio trikampis, Niutono binomo formulė.

XII klasė. TIKIMYBĖS. Elementariųjų įvykių aibė, įvykių tipai, klasikinis tikimybės apibrėžimas, įvykių algebra, nepriklausomi ir nesutaikomi įvykiai, atsitiktiniai dydžiai ir jų skirstiniai, Bernulio bandymai.

STATISTIKA. Skaitinės imties charakteristikos (plotis, centras, vidurkis, dispersija), dažnis ir tikimybė, normalusis skirstinys.

2002 m. rugpjūčio 21 d. buvo patvirtintos Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos ir bendrojo išsilavinimo standartai XI–XII klasėms. Juose temos buvo išdėstytos pateikiant bendrojo kurso privalomas temas, o po to papildomas – išplėstinio kurso.

Bendrasis kursas. Bandymo baigčių skaičiaus radimas. Nesutaikomi atsitiktiniai įvykiai, jų sąjungos tikimybė. Nepriklausomi atsitiktiniai įvykiai, jų sankirtos tikimybė. Generalinė aibė ir imtis. Imties paėmimo būdai. Imties pateikimas dažnių lentele. Grafinis imties vaizdavimas: diagrama, histograma. Imties skaitinės charakteristikos: vidurkis, dispersija, mediana, moda, kvartiliai. Koreliacijos samprata.

Papildomos išplėstinio kurso temos. Derinių iš $n$ po $k$ skaičiaus radimas pagal formulę. Sąlyginė tikimybė, įvykių sankirtos tikimybė. Atsitiktiniai dydžiai ir jų skirstiniai. Atsitiktinio dydžio matematinė viltis, dispersija, mediana, moda, kvartiliai. Binominiai bandymai ir binominis tikimybių skirstinys. Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Dviejų požymių imties koreliacijos koeficientas.

Ilgą laiką pagrindinė mokomoji priemonė buvo tik Aleksandro Plikuso knyga "Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys" (Kaunas: Šviesa, 1993, 1998). Dabar mokiniai jau turi galimybę mokytis ir iš naujų lietuviškų vadovėlių. Taip pat išleistos mokytojų knygos, žymiai palengvinančios mokytojų darbą.

Didžioji dalis programoje išvardytų klausimų įtraukti ir į valstybinio brandos egzamino reikalavimus. Paprastai egzaminuose pateikiami nesudėtingi kombinatorikos ar tikimybių skaičiavimo uždaviniai, atitinkantys egzaminų programos reikalavimus. Pateikiame kai kuriuos iš šių uždavinių.

**1998 metai**. Rita žaidžia su kortelėmis. Ant kiekvienos kortelės parašyta viena raidė. Tai raidės B, R, T, A, I, S. Kokia tikimybė, kad Rita, atsitiktinai sudėjusi 4 raides, sudės savo vardą?

Metame šešiasienį lošimo kauliuką. Raide $n$ pažymėkime atsivertusių kauliuko akučių skaičių ir nagrinėkime kvadratinę lygtį $x^2 + nx + 1 = 0$. a) Raskite šių įvykių tikimybes: $A$ – lygtis realiųjų šaknų neturi; $B$ – lygtis turi dvi skirtingas realias šaknis; b) Apibrėžkite įvykiui $A$ priešingą įvykį.

**1999 metai**. Turime šešiasienį simetrišką lošimo kauliuką, ant kurio sienų surašyti šeši skaičiai 1, 1, 1, 1, 3, 3. Atliekamas toks eksperimentas. Kauliukas metamas du kartus ir skaičiai, atvirtę po pirmojo ir po antrojo metimų, sudedami. Nagrinėjamas atsitiktinis dydis $X$ lygus atvirtusių skaičių sumai. 1) Parodykite, kad atsitiktinis dydis $X$ įgyja reikšmę 2 su tikimybe $\frac{4}{9}$. 2) Pabaikite pildyti lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio $X$ skirstinį, kai duota reikšmės 2 tikimybė. 3) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio $X$ matematinę viltį $EX$.

**2000 metai**. Turime du šešiasienius lošimo kauliukus. Pirmojo lošimo kauliuko keturios sienos nudažytos mėlynai, o kitos dvi – raudonai. Antrojo lošimo kauliuko dvi sienos nudažytos mėlynai, o keturios – raudonai. Metami abu lošimo kauliukai. 1) Parodykite, kad įvykio abiejų kauliukų atsivertė raudona spalva nudažytos sienos tikimybė lygi $\frac{2}{9}$. 2) Kuris iš šių dviejų įvykių labiau tikėtinas: $A$ – abiejų kauliukų atsivertė raudona spalva nudažytos sienelės, $B$ – abiejų kauliukų atsivers skirtinga spalva nudažytos sienelės. 3) Tęsiant eksperimentą, pirmojo kauliuko sienų spalvos nekeičiamos, o dalis antrojo kauliuko sienų perdažomos. Kiek antrojo kauliuko sienų turi būti nudažytos raudonai ir kiek mėlynai, kad, metant abu kauliukus kartu, tikimybė iškristi ta pačia spalva nudažytoms sienoms būtų lygi tikimybei iškristi skirtingomis spalvomis nudažytoms sienoms? (Pagrindinė sesija.)

**2001 metai**. 1) Kiek skirtingų keturženklių skaičių, kurių visi skaitmenys skirtingi, galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3? 2) Iš skaitmenų 0, 1, 2, 3 atsitiktinai sudaromas keturženklis skaičius, kurio visi skaitmenys skirtingi. Kokia tikimybė, kad šis skaičius dalijasi iš 6? (Pagrindinė sesija.)

Atsitiktinai paimti du neneigiami vienženkliai sveikieji skaičiai. Kokia tikimybė, kad šių skaičių suma yra dviženklis skaičius? (Pakartotinė sesija.)

**2002 metai**. Turnyre dalyvauja dvi šachmatininkų komandos. Kiekvienoje komandoje po du žaidėjus. Kiekvienas pirmosios komandos šachmatininkas žaidžia po vieną partiją su antrosios komandos kiekvienu žaidėju. Už laimėtą partiją komanda gauna po 2 taškus, už lygiąsias – 1 tašką, už pralaimėtą – taškų negauna. Tikimybė pirmosios komandos šachmatininkui partiją laimėti lygi lygiųjų tikimybei ir lygi pralaimėjimo tikimybei. Kiekvienos partijos baigtis nepriklauso nuo kitų partijų baigčių. Apskaičiuokite tikimybę, kad pirmoji komanda surinks: 1) 8 taškus; 2) 7 taškus; 3) 6 taškus; 4) ne mažiau kaip 6 taškus. (Pagrindinė sesija.)

Tarkime, kad egzamino metu 6 studentai sėdi už bendro stalo ant vieno suolo, kurio abu galai yra šalia praėjimų. Egzaminą studentai baigia atsitiktine tvarka ir išsyk išeina. Kokia tikimybė, kad bent vienas studentas, norėdamas išeiti, turės paprašyti praleisti kurį nors iš likusių savo draugų? (Pakartotinė sesija.)

**2003 metai**. Dėžutėje penkios kortelės, ant kurių užrašyti skaičiai: ant pirmos ir ant antros – skaičius 2, ant trečios ir ketvirtos – skaičius 3, ant penktos – skaičius

4. Atsitiktinai paimamos dvi kortelės. Ant paimtųjų kortelių užrašytų skaičių suma yra atsitiktinis dydis $X$. 1) Parodykite, jog įvykio, kad ant paimtųjų kortelių užrašytų skaičių suma yra 4, tikimybė lygi 0,1. 2) Pabaikite pildyti atsitiktinio dydžio $X$ skirstinio lentelę, kai 6 tikimybė yra 0,3, o 7 tikimybė – 0,2. 3) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį. (Pagrindinė sesija.)

Nudažytas kubas supjaustytas į 64 vienodo didumo kubelius. Juos sumaišius, atsitiktinai paimamas vienas kubelis. Apskaičiuokite tikimybę, kad šis kubelis: a) turės vieną nudažytą sienelę; b) turės dvi nudažytas sieneles; c) turės vieną arba daugiau nudažytų sienelių. (Pakartotinė sesija.)

**2004 metai**. Sauluvos valstybėje automobilio registracijos numerį sudaro penki ženklai: pirmieji du – lotynų abėcėlės raidės, kurios parenkamos iš 22 raidžių, kiti trys – skaitmenys, kurie parenkami iš skaitmenų 2, 4, 6, 8. Skaitmenų rinkinys, sudarytas iš trijų vienodų skaitmenų (pavyzdžiui, 222, 444) nenaudojamas, kad nebūtų išskirtinių numerių. Kiek galima sudaryti registracijos numerių? (Pagrindinė sesija.)

Įdomu, kaip keisis tikimybių teorija vidurinėje mokykloje per ateinantį dešimtmetį. Tikriausiai jos programa nesiplės – ji ir taip gana plati, be to, ir matematikai skirtų savaitinių valandų nėra daug. Lieka tikėtis, kad ateityje tikimybių teorijos temos nebekels sunkumų nei mokytojams, nei mokiniams.

SUMMARY

***E. Stankus. Teaching of probability theory and combinatorics at secondary schools***

The topics of probability theory and combinatorics were brought into curricula of Lithuanian secondary schools ten years ago. The problems of teaching and actual situation of apprehension of concepts of probability theory and combinatorics are analyzed.

*Keywords:* probability theory, combinatorics, teaching, curricula, exams.