Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 138–143

Laipsninių eilučių reiškimas baigtine eksponentinių funkcijų suma

Liepa BIKULČIENĖ, Zenonas NAVICKAS (KTU)
el. paštas: liepaite@takas.lt, zenonas.navickas@ktu.lt

Reziumė. Straipsnyje pateikiamas konkretus skaičiavimo algoritmas, kaip laipsninę eilutę išreikšti baigtine eksponentinių funkcijų suma. Gauti rezultatai naudojami aprašant diferencialinių lygčių sprendinius, gautus operatoriniu metodu.

Raktiniai žodžiai: diferencialinės lygtys, eilutės eilė, operatorinis metodas..

1. Įvadas

Sprendžiant tiek tiesines, tiek netiesines diferencialines lygtis, sprendiniai gan dažnai užrašomi laipsninės eilutės pavidale, [1], t.y.

$$y(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (x - x_0)^j, \quad |x - x_0| < R,$$

kuris, deja nėra patogus analiziškai bei kokybiškai tiriant diferencialines lygtis. Kur kas patogiau turėti sprendinio išraišką, nusakomą kokių nors gerai žinomų funkcijų dariniu.

Virpesių mechanikoje yra patogu tiriamosios diferencialinės lygties sprendinį $y(x)$ išreikšti (jeigu tai yra galima), pavyzdžiui, tokiu harmonikų dariniu

$$y(x) = \sum_{r=1}^{m} \big(\mu_r \cos(\lambda_r (x - x_0)) + \gamma_r \sin(\nu_r (x - x_0))\big).$$

Taigi, iškyla kiek netradicinis uždavinys: kaip, žinant pakankamai daug laipsninės eilutės (konverguojančios kokioje nors srityje) koeficientų a_j skaitinių reikšmių, surasti specialiųjų funkcijų, naudojamų aprašant nagrinėjamąją laipsninę eilutę, parametrus.

Šiame darbe yra siūlomas vienas šio uždavinio sprendimo algoritmas.

Pateikiamas konkretus taikymo pavyzdys, kai specialiosios funkcijos yra eksponentės, kurių laipsnių rodikliai – kompleksiniai skaičiai.

2. Teorinė dalis

2.1. Pagalbinės sąvokos ir lema

Su kiekviena kompleksinių skaičių seka $p_1, p_2, \ldots$ ir kiekvienu $m \in N$ galima sudaryti dvi determinantų sekas: $\Delta_m^{(n)}(p_j)$ ir $\hat{\Delta}_m^{(n)}(p_j; \rho)$, $n = 0, 1, \ldots$, (čia $\rho \in C$ – kintamasis), kai

$$\Delta_m^{(n)}\left(p_j\right) := \det \begin{Vmatrix} p_{1+n} & p_{2+n} & \cdots & p_{m+n} \\ p_{2+n} & p_{3+n} & \cdots & p_{m+1+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m+n} & p_{m+1+n} & \cdots & p_{2m-1+n} \end{Vmatrix},$$

$$\hat{\Delta}_m^{(n)}\left(p_j;\rho\right) := \det \begin{Vmatrix} p_{1+n} & p_{2+n} & \cdots & p_{m+1+n} \\ p_{2+n} & p_{3+n} & \cdots & p_{m+2+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m+n} & p_{m+1+n} & \cdots & p_{2m+n} \\ 1 & \rho & \cdots & \rho^m \end{Vmatrix}.$$

Taip pat, su kiekvienu $m \in N$ bei duotomis skaičių aibėmis $\mu_r, \lambda_r \in C\backslash\{0\}$, $r = 1, 2, \ldots, m$, kai $\lambda_{r'} \neq \lambda_{r''}$, jeigu $r' \neq r''$, galime sudaryti skaičių seką $q_1, q_2, \ldots$, nusakomą sąryšiu $q_j := \sum_{r=1}^{m} \mu_r \lambda_r^j$, $j \in N$.

LEMA. *Su seka $q_1, q_2, \ldots$ galime susieti tokias tapatybes:*

$$\Delta_m^{(n)}\left(q_j\right) = \sigma_m \Lambda^{1+n}\left(V_m\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right)\right)^2, \tag{1}$$

$$\hat{\Delta}_m^{(n)}\left(q_j;\rho\right) = \sigma_m \Lambda^{1+n} V_m\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) \cdot V_{m+1}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \rho\right), \tag{2}$$

kai $V_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ir $V_{m+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \rho)$ yra sudaromųjų $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \rho$ Vandermondo determinantai, o $\sigma := \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_m$ ir $\Lambda := \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_m$.

Taigi,

$$\Delta_m^{(n)}\left(q_j\right) = \det \left\Vert \sum_{r=1}^{m} \mu_r \lambda^{k+l-1+n} \right\Vert_{k,l=1,\ldots,m}$$
$$= \left(\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_m\right)\left(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_m\right)^{1+n} \sum_{(r_1,\ldots,r_m)} \det \left\Vert \lambda_{r_k}^{k+l-2} \right\Vert_{k,l=1,\ldots,m}.$$

Čia sumuojama pagal visus sveikųjų skaičių $1, 2, \ldots, m$ kėlinius $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$. Pastebėję, kad $\sum_{(r_1,\ldots,r_m)} \det \|\lambda_{r_k}^{k+l-2}\| = (\det \|\lambda_k^{l-1}\|)^2, k, l = 1, 2, ..., m$, gauname (1) tapatybės įrodymą. Tapatybė (2) įrodoma analogiškai.

1 išvada. Iš (1) tapatybės įrodymo turime, kad

$$\Delta_{m+1}^{(n)}\left(q_j\right) \equiv 0, n \in Z_0. \tag{3}$$

Tegul duota realaus kintamojo x, konverguojanti su visomis $x, x_0 \in R$ reikšmėmis, kai x_0 – fiksuotas, laipsninė eilutė:

$$y(x) := \sum_{j=0}^{+\infty} p_j \frac{(x-x_0)^j}{j!}, \quad \left|p_j\right| \leqslant M^j, \; 0 < M < +\infty. \tag{4}$$

Apibrėžimas. Sakysime, kad (4) eilutė yra m-tos eilės ($m \in N$), jeigu ji išreiškiama

$$y(x) = \mu_0 + \sum_{r=1}^{m} \mu_r \exp\big(\lambda_r (x - x_0)\big). \tag{5}$$

Čia $\mu_r, \lambda_r \in C\backslash\{0\}$ ir, be to, $\lambda_{r'} \neq \lambda_{r''}$, jeigu $r' \neq r''$.

Funkciją $y(x) \equiv \text{const}$ vadinsime nulinės eilės. Jeigu (4) eilutės negalima išreikšti (5) atitiktimi (t.y. toks natūrinis skaičius m neegzistuoja, kad galiotų (5) atitiktis), tai sakysime, kad (4) eilutė eilės neturi.

2.2. *Skaičiavimo algoritmas*

Pasiūlysime konkretų skaičiavimo algoritmą, reiškiamą tokiomis teoremomis ir išvada.

1 teorema. *Tegul duotoji* (4) *eilutė yra m-tos eilės. Tada, su kiekviena fiksuota $n \in Z_0$ reikšme, ją nusakantys parametrai λ_r $(r = 1, \ldots, m)$, yra algebrinės lygties*

$$\hat{\Delta}_m^{(n)}\left(p_j; \rho\right) = 0 \tag{6}$$

sprendiniai, t.y.

$$\lambda_r = \rho_r, \quad r = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Čia $\rho_r \neq 0$, $\rho_{r'} \neq \rho_{r''}$, jeigu $r' \neq r''$. Tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{r=1}^{m} \rho_r^{j+n} \eta_r = p_{j+n}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2m, \tag{8}$$

turi vienintelį sprendinį, tenkinantį sąryšį:

$$\mu_r = \eta_r, \quad r = 1, 2, \ldots, m. \tag{9}$$

Čia $\eta_r \neq 0$. Be to, koeficientas μ_0 nusakomas šitaip:

$$\mu_0 = p_0 - \sum_{r=1}^{m} \mu_r. \tag{10}$$

Iš teoremos prielaidos turime, kad

$$p_j = \sum_{r=1}^{m} \mu_r \lambda_r^j, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Imdami $q_j := p_j$, $j = 1, 2, \ldots$, iš (11) sąryšio ir (2) tapatybės gauname, kad (6) lygtis su kiekvienu $n \in Z_0$ reikšme yra ekvivalenti algebrinei lygčiai:

$$V_{m+1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \rho) = 0.$$

Taigi, iš šios lygties turime (7) atitikties teisingumo įrodymą. Be to su (6) algebrinės lygties sprendiniais galima sudaryti tokias tapatybes:

$$\begin{vmatrix} p_{1+n} & p_{2+n} & \cdots & p_{m+1+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m+n} & p_{m+1+n} & \cdots & p_{2m+n} \\ \lambda_r^{1+n} & \lambda_r^{2+n} & \cdots & \lambda_r^{m+1+n} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1^{j+n} & \lambda_1^{j+1+n} & \cdots & \lambda_1^{j+m+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_m^{j+n} & \lambda_m^{j+1+n} & \cdots & \lambda_m^{j+m+n} \\ p_{j+n} & p_{j+1+n} & \cdots & p_{j+m+n} \end{vmatrix} = 0,$$

kai $r, j = 1, 2, \ldots, m,\ n = 0, 1, \ldots$. Iš pastarųjų tapatybių gauname, kad (8) sistemos matricos ir išplėstinės matricos rangai sutampa; ir, be to, lygūs eilutės eilei m, t.y. (8) sistema turi vienintelį sprendinį, tenkinantį (9) atitiktį. Sąryšis (10) yra išvada iš (5) bei (11) sąryšių.

2 išvada. Jeigu žinome koeficientus (1 teorema) $p_1, p_2, \ldots, p_{2m}$ (t.y. m-tos eilės (4) eilutės koeficientus), tai likusius $p_j,\ j = 2m+1, 2m+2, \ldots$ galime surasti dviem skirtingais būdais, t.y. naudodamiesi arba (3) tapatybe, arba (11) atitiktimi, prieš tai suradę koeficientus $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m;\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

2 teorema. *Duotoji* (4) *eilutė yra m-tos eilės* $(m \in N)$ *tada ir tik tada, kai*

a) *determinantų seka* $\Delta_m^{(n)}(p_j),\ n = 0, 1, \ldots$ *tenkina sąryšius*

$$\Delta_m^{(n+1)}\left(p_j\right) = \Delta_m^{(n)}\left(p_j\right)\Delta, \tag{12}$$

kai $\Delta_m^{(n)}, \Delta \in C\backslash\{0\}$, *ir, be to,* Δ *– pastovus dydis, nepriklausantis nuo n;*

b) *algebrinė (6) lygtis, kai* $n = 0$, *turi m skirtingų nelygių nuliui šaknų.*

Būtinumo įrodymą gauname iš m-tos eilės (4) eilutės apibrėžimo, (1) tapatybės bei 1 teoremos.

Pakankamumas. Pirmiausia pastebėsime, kad iš teoremos b) sąlygos turime, kad (8) lygčių sistema, kai $n = 0$ turi vienintelį sprendinį. Taigi, p_j, kai $j = 1, 2, \ldots, 2m$ tenkina (11) sąryšį. Po to, pasinaudoję (11) bei (12) atitiktimis, galime suskaičiuoti atitinkamai koeficientus p_j ir $\bar{p}_j,\ j = 2m+1, 2m+2, \ldots$, kurie dėl 2 išvados privalo sutapti, t.y. $p_j = \bar{p}_j,\ j \geqslant 2m+1$.

Šiais dviem elementariaisiais pavyzdžiais pailiustruosime 2 teoremos a) ir b) sąlygų pagrįstumą.

1 pavyzdys. Tegul turime eilutę $y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}$. Tada $p_j = j$, kai $j = 1, 2, \ldots$ ir, be to, $m = 2$, nes $\Delta_2^{(n)} = -1,\ \Delta_3^{(n)} \equiv 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, t.y. $\Delta = 1$, bet algebrinė lygtis $\hat{\Delta}_2^{(0)}(p_j; \rho) = 0$ turi vienintelę kartotinę šaknį $\rho_{1,2} = 1$. Taigi, tiriamoji eilutė nėra antros eilės. (Iš tikrųjų $y(x) = x\exp(x)$).

2 pavyzdys. Tegul turime (4) eilutę, kurios koeficientai $p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 3,\ p_4 = 6, \ldots$, t.y. tegul $\Delta_2^{(0)} = -1,\ \Delta = -3,\ \Delta_3^{(n)} \equiv 0$. Vadinasi, $\Delta_2^{(n)} = -(-3)^n$, $n \in Z_0$. Tada algebrinė lygtis $\hat{\Delta}_2^{(0)}(p_j; \rho) = 0$ turi dvi skirtingas šaknis $\rho_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ ir, be to, $\mu_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{3}}{6}$. Taigi, tiriamoji eilutė yra antros eilės ir su $p_0 = \frac{2}{3}$ turime, kad $y(x) = \frac{2+\sqrt{3}}{6}\exp(\sqrt{3}x) + \frac{2-\sqrt{3}}{6}\exp(-\sqrt{3}x)$.

3. Taikymo pavyzdys

Naudojantis 1 ir 2 teoremomis bei (1)–(3) tapatybėmis galima sudaryti įvairius algoritmus tiriamosios eilutės eilei m nustatyti, bei ją nusakančių koeficientų $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ reikšmėms surasti. Kai duotoji eilutė yra diferencialinės lygties sprendinys, tai ieškomų koeficientų skaičiavimą pailiustruosime tokiu pavyzdžiu.

3 pavyzdys. Tegul duota diferencialinė lygtis $y'' = -\sin y$, $y = y(x)$ su pradinėmis sąlygomis $y(0) = 0.01$, $y'(0) = 0.01$. Tada, panaudojus operatorinį skaičiavimo algoritmą, [2], kai $x_0 = 24$, ir apsiribojus tikslumu iki keturių ženklų po kablelio, jos sprendinys $y(x)$ užrašomas tokia eilute (kai $|x - 24| < 1$):

$$y(x) = -0.0047 + 0.0133(x-24) + 0.0024(x-24)^2 - 0.0022(x-24)^3 + \ldots$$

Paskaičiuojame determinantus:

$$\Delta_2^{(0)} = \Delta_2^{(1)} = \Delta_2^{(2)} = \cdots = -2 \cdot 10^{-4}, \quad \text{t.y. } \Delta := 1,$$

$$\Delta_3^{(0)} = -3 \cdot 10^{-10},\ \Delta_3^{(1)} = 1.5 \cdot 10^{-9},\ \Delta_3^{(2)} = 2.6 \cdot 10^{-9},\ \Delta_3^{(3)} = -1.3 \cdot 10^{-8}, \ldots,$$

$$\Delta_4^{(0)} = 1.4 \cdot 10^{-14},\ \Delta_4^{(1)} = 1.3 \cdot 10^{-13},\ \Delta_4^{(2)} = 1.2 \cdot 10^{-12}, \ldots, \quad \text{t.y. } \Delta := 9,$$

$$\Delta_5^{(0)} = 4 \cdot 10^{-19},\ \Delta_3^{(1)} = -9.6 \cdot 10^{-16},\ \Delta_5^{(2)} = -2.4 \cdot 10^{-9}, \ldots.$$

Taigi, jeigu laikome, kad $\Delta_3^{(n)} \equiv 0$, t.y. $m := 2$, tai gauname sprendinio $y(x)$ antros eilės aproksimaciją $\bar{y}(x)$:

$$\bar{y}(x) = \frac{-0.005 - 0.013i}{2} e^{i(x-24)} + \frac{-0.005 + 0.013i}{2} e^{-i(x-24)},$$

t.y., $\bar{y}(x) = -0.005\cos(x-24) + 0.013\sin(x-24)$.

Eilutės $y(x)$ aproksimacijai $\bar{y}(x)$ suteikus aukštesnes eiles $m \geqslant 2$, skirtumas δ_m tarp sprendinių, gautų įvairiais duotos diferencialinės lygties sprendimo metodais [3] ir sprendinio aproksimacijos $\bar{y}(x)$, gautos naudojant eksponentinių funkcijų sumas, mažėja. Pavyzdžiui, jei $m := 2$, tai $\delta_2 \leqslant 10^{-4}$, kai $m := 4$, tai $\delta_4 \leqslant 10^{-9}$, o kai $m := 6$, tai $\delta_6 \leqslant 10^{-12}$. Čia imame $|x - 24| \leqslant 1$ ir, be to, kai $m > 2$, didiname skaičiavimo tikslumą.

Šiuo metu sprendinių reiškimo harmonikomis metodas yra taikomas diferencialinėms lygtims, kurios aprašo dinamines sistemas, perduodančias bangų ar skysčio virpamąjį judesį į rotacinį judesį, tirti. Vienas iš tokios sistemos pavyzdžių yra pateiktas [4] darbe.

Baigdami pastebėsime, kad čia pateiktas skaičiavimo algoritmas gali būti panaudotas ir kitų (t.y. ne eksponentinių) funkcijų aproksimuojančioms išraiškoms sudarinėti.

Literatūra

1. З. Навицкас, Операторный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, *Liet. matem. rink.*, **42**(4), 486–493 (2002).
2. L. Bikulčienė, Realization of operator method for the solutions of differential equations, *Liet. matem. rink.*, **42**(2), 159–164 (2002).

3. В.П. Дьяконов, *Математическая система Maple V R3/R4/R5*, Солон, Москва (1998).
4. K. Ragulskis, Z.Navickas, L.Bikulčienė, Realization of operator method for mechanical system, *Journal of Vibroengineering*, 1(8), Vilnius, Lithuania, 31–34 (2002).

SUMMARY

L. Bikulčienė, Z. Navickas. Solution of differential equations using sum of exponential functions

In this paper algorithm for the expression power series to sum of exponential functions are presented. The results in case of operator solving method for differential equations are applied.

Keywords: differential equations, order of series, operator method.