Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 150–157

О расположении корней некоторых специальных полиномов

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU), Дмитрий КИРЬЯЦКИЙ (VU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Введение. В различных разделах математического анализа приходится изучать расположение корней многочлена в некоторой заданной области. Например, поведение корней характеристического многочлена имеет важное значение в теории дифференциальных уравнений. Другой пример связан с таким важным понятием, как устойчивость. Ясно, что количество примеров, где исследуется расположение корней многочленов, можно при желании увеличить. Нет также надобности обременять читателя литературой, посвященной многочленам, которая выходит в достаточно большом количестве. В данной работе мы изучаем поведение корней однородного симметрического многочлена

$$\sigma_k(z_1,\ldots,z_n)=\sum z_1^{j_1}\ldots z_n^{j_n},\quad \text{где } j_1\geqslant 0,\ldots,j_n\geqslant 0 \text{ и } j_1+\ldots+j_n=k$$

от комплексных переменных $z_1,\ldots,z_n$ в угловой области. Показана определенного типа связь такого многочлена с разделенными разностями высшего порядка, а также с линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

1. χ-последовательность. Последовательность положительных чисел $a_0,\ldots,a_k$ назовем χ-последовательностью, если выполняются неравенства $a_m^2\geqslant a_{m+1}a_{m-1}$, $m=1,\ldots,k-1$. Если последовательность $a_0,\ldots,a_k$ такая, что $a_0=\ldots=a_k$, то назовем ее тривиальной χ-последовательностью. Простейшим примером χ-последовательности может служить геометрическая прогрессия. Из определения χ-последовательности следует

$$\ln a_m\geqslant\frac{\ln a_{m+1}+\ln a_{m-1}}{2},$$

т.е. χ-последовательность является логарифмически выпуклой вверх последовательностью. Кроме того, нетрудно видеть, что

$$\frac{a_0}{a_1}\leqslant\frac{a_1}{a_2}\leqslant\ldots\leqslant\frac{a_{m-1}}{a_m}.$$

ЛЕММА 1. *Если $a_0, \dots, a_k$ есть χ-последовательность, то она может быть только четырех типов: возрастающей, убывающей, тривиальной, сначала возрастающей, а потом убывающей, т.е. $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \dots \leqslant a_l$, и $a_l \geqslant a_{l+1} \geqslant \dots \geqslant a_k$, где среди чисел $a_0, \dots, a_k$ есть хотя бы два числа, не равных между собой.*

ЛЕММА 2. *Пусть последовательности $a_0, \dots, a_k, ib_0, \dots, b_k$ являются χ-последовательностями. Тогда последовательность $a_0b_0, \dots, a_kb_k$ также является χ-последовательностью.*

ЛЕММА 3. *Если $a_0, \dots, a_k$ есть χ-последовательность, то $a_k, \dots, a_0$ также есть χ-последовательность.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $a_0, \dots, a_k$ есть χ-последовательность. Тогда многочлен $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{k-1}z^{k-1} + a_kz^k$ не имеет корней в угловой области*

$$-\frac{2\pi}{k+1} < \arg z < \frac{2\pi}{k+1}. \tag{1}$$

Доказательство. Так как $a_0 > 0$, то $P(0) \neq 0$. Кроме того, многочлен $P(z)$ не имеет положительных корней. Так как коэффициенты многочлена $P(z)$ являются по условию вещественными числами, то для доказательства теоремы нам достаточно установить отсутствие у этого многочлена корней в угловой области $0 < \arg z < 2\pi/(k+1)$. Пусть $z = r\varepsilon$, где $r = |z| > 0$ и $\varepsilon = e^{i\alpha}$, причем $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$. Тогда $P(r\varepsilon) = a_0 + a_1r\varepsilon + \dots + a_kr^k\varepsilon^k$. При каждом конкретном $r > 0$ последовательность

$$a_0, a_1r, \dots, a_kr^k \tag{2}$$

по лемме 2 есть χ-последовательность. Пусть χ-последовательность (2) является тривиальной, т.е. $a_0 = a_1r = \dots = a_kr^k$. Тогда

$$P(r\varepsilon) = a_0 + a_0r\varepsilon + \dots + a_0r^k\varepsilon^k = a_0\frac{1-\varepsilon^{k+1}}{1-\varepsilon}.$$

Ясно, что $P(r\varepsilon) \neq 0$ в угловой области $0 < \arg z < 2\pi/(k+1)$. Пусть χ-последовательность (2) является монотонно убывающей, т.е. $a_0 \geqslant a_1r \geqslant \dots \geqslant a_kr^k$, где не все члены этой последовательности совпадают между собой. Так как $\varepsilon \neq 1$, то

$$\begin{aligned}
|(1-\varepsilon)P(r\varepsilon)| &= \left|(1-\varepsilon)\left(a_0 + a_1r\varepsilon + a_2r^2\varepsilon^2 + \dots + a_kr^k\varepsilon^k\right)\right| \\
&= \Big|a_0 - (a_0 - a_1r)\varepsilon - \left(a_1r - a_2r^2\right)\varepsilon^2 - \dots \\
&\quad - \left(a_{k-1}r^{k-1} - a_kr^k\right)\varepsilon^k - a_kr^k\varepsilon^{k+1}\Big|
\end{aligned}$$

$$\geqslant a_0 - \left| (a_0 - a_1 r)\,\varepsilon + \left(a_1 r - a_2 r^2\right)\varepsilon^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(a_{k-1} r^{k-1} - a_k r^k\right)\varepsilon^k + a_k r^k \varepsilon^{k+1} \right|$$
$$> a_0 - \left(a_0 - a_1 r + a_1 r - a_2 r^2 + \ldots + a_{k-1} - a_k r^k + a_k r^k\right) = 0.$$

Значит, $P(r\varepsilon) \neq 0$ в угловой области $0 < \arg z < 2\pi/(k+1)$. Аналогичным образом можно убедиться также в справедливости теоремы, если χ-последовательность (2) является монотонно возрастающей.

Пусть теперь χ-последовательность (2) сначала возрастает, а затем убывает. По лемме 1 для каждого r найдется такое, зависящее от r, число m, $0 \leqslant m \leqslant k$, для которого

$$a_0 \leqslant a_1 r \leqslant \ldots \leqslant a_m r^m, \tag{3}$$
$$a_{m+1} r^{m+1} \geqslant a_{m+2} r^{m+2} \geqslant \ldots \geqslant a_k r^k. \tag{4}$$

Пусть $P(r\varepsilon) = P_1(r\varepsilon) + P_2(r\varepsilon)$, где

$$P_1(r\varepsilon) = a_0 + a_1 r\varepsilon + \ldots + a_m r^m \varepsilon^m,$$
$$P_2(r\varepsilon) = a_{m+1} r^{m+1} \varepsilon^{m+1} + \ldots + a_k r^k \varepsilon^k.$$

Обозначим $T_1(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^m$ и $T_2(\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} + \ldots + \varepsilon^k$. Из (3) и (4) следуют неравенства

$$m\alpha \leqslant \arg P_2(r\varepsilon) \leqslant \arg T_2(\varepsilon) = \frac{\alpha}{2}(m+k+1) \quad \text{и } m\alpha \geqslant \arg P_1(r\varepsilon) \geqslant \arg T_1(\varepsilon) = \frac{m\alpha}{2} > 0,$$

благодаря которым, получаем

$$\arg P_2(r\varepsilon) - \arg P_1(r\varepsilon) \leqslant \arg T_2(\varepsilon) - \arg T_1(\varepsilon) = \frac{1+k}{2}\alpha < \pi.$$

Отсюда следует, что $P(r\varepsilon) \neq 0$ при любом α, удовлетворяющем условию $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$. Так как коэффициенты многочлена $P(z)$ являются положительными числами, то этот многочлен отличен от нуля в угловой области (1).

Следствие 1. Если коэффициенты $1, a_n, \ldots, a_1, a_0$ дифференциального уравнения $Z^{(n+1)}(z) + a_n Z^{(n)}(z) + \ldots + a_1 Z^{(1)}(z) + a_0 Z(z) = 0$ образуют χ-последовательность, то характеристический многочлен $L_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \neq 0$ в угловой области $-\frac{2\pi}{n+2} < \arg z < \frac{2\pi}{n+2}$.

2. Разделенная разность n-го порядка. Определим разделенную разность n-го порядка аналитической в области D функции $F(z)$ для попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in D$ формулой

$$[F(z); z, \ldots, z_n] = \frac{[F(z); z_0, \ldots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \ldots, z_n]}{z_0 - z_n}, \quad [F(z); z_0] = F(z_0).$$

Вообще, если $\xi_0, \ldots, \xi_s \in D$ и попарно различные, то полагаем

$$\left[F(z); \underbrace{\xi_0, .., \xi_0}_{p_0}, \ldots, \underbrace{\xi_s, \ldots, \xi_s}_{p_s}\right] = \frac{1}{(p_0-1)! \ldots (p_s-1)!} \frac{\partial^{n-s}[F(z); \xi_0, .., \xi_s]}{\partial \xi_0^{p_0-1} \ldots \partial \xi_s^{p_s-1}}.$$

В частности,

$$\left[F(z); \underbrace{\xi, \ldots, \xi}_{n+1}\right] = \frac{1}{n!} F^{(n)}(\xi).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $L_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0$ – *многочлен с комплексными коэффициентами* $a_0, \ldots, a_n$ *и корнями* $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$. *Функция*

$$\Psi(z) = \left[e^{z\zeta}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\zeta^{n+k}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n]}{(n+k)!} z^{n+k} \tag{5}$$

является частным решением дифференциального уравнения

$$Z^{(n+1)}(z) + a_n Z^{(n)}(z) + \ldots + a_1 Z^{(1)}(z) + a_0 Z(z) = 0 \tag{6}$$

и удовлетворяет условиям Коши

$$\Psi(0) = \Psi^{(1)}(0) = \ldots = \Psi^{(n-1)}(0) = 0, \quad \Psi^{(n)}(0) = 1. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$\Psi^{(k)}(z) = \left[\zeta^k e^{z\zeta}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$L_{n+1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \ldots (\lambda - \lambda_n). \tag{9}$$

Подставим функцию $\Psi(z)$ в левую часть дифференциального уравнения (6). Пользуясь (8), (9) и элементарными свойствами разделенных разностей, получим

$$\begin{aligned}
&\left[\zeta^{n+1} e^{z\zeta}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] + a_n \left[\zeta^n e^{z\zeta}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] + \ldots + a_1 \left[\zeta e^{z\zeta}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] \\
&\quad + a_0 \left[e^{z\zeta}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] \\
&\quad = \left[\zeta^{n+1} e^{z\zeta} + a_n \zeta^n e^{z\zeta} + \ldots + a_1 \zeta e^{z\zeta} + a_0 e^{z\zeta}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] \\
&\quad = \left[e^{z\zeta} L_{n+1}(\zeta); \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] \\
&\quad = \left[e^{z\lambda}(\lambda - \lambda_0) \ldots (\lambda - \lambda_n); \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] = 0.
\end{aligned}$$

Далее, легко понять, что

$$\Psi^{(n)}(0) = \left[\zeta^n; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] = 1, \quad \Psi^{(k)}(0) = \left[\zeta^k; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, функция $\Psi(z) = [e^{z\zeta}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n]$ действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и условиям Коши (7). Тот факт, что функция $\Psi(z)$ разлагается в степенной ряд (5), следует из равенств

$$\Psi^{(n+k)}(0) = \left[\zeta^{n+k}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

3. Однородный симметрический многочлен степени k. Легко показать, что $[\zeta^{n+k}; \lambda_0, \ldots, \lambda_n] = \sigma_k(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = \sum \lambda_0^{j_0} \ldots \lambda_n^{j_n}$, где $j_0 + \ldots + j_n = k$ и $j_0 \geqslant 0, \ldots, j_n \geqslant 0$.

Отметим следующее свойство симметрического многочлена [1]. Пусть $\zeta_0, \ldots, \zeta_s$ и $\xi_0, \ldots, \xi_p$ – два множества комплексных чисел. Тогда

$$\sigma_k\left(\zeta_0, \ldots, \zeta_s, \xi_0, \ldots, \xi_p\right) = \sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}\left(\zeta_0, \ldots, \zeta_s, \xi_0, \ldots, \xi_p\right),$$

где

$$\Delta_{k,m}\left(\zeta_0, \ldots, \zeta_s, \xi_0, \ldots, \xi_p\right) = \sigma_{k-m}\left(\zeta_0, \ldots, \zeta_s\right) \cdot \sigma_m\left(\xi_0, \ldots, \xi_p\right).$$

ЛЕММА 4. *Пусть $v_0, \ldots, v_s$ – неотрицательные числа и $v_0 > 0$. Тогда при любых $s \geqslant 0$ и $l \geqslant 0$ последовательность симметрических многочленов*

$$\sigma_l(v_0, \ldots, v_s), \ \sigma_{l+1}(v_0, \ldots, v_s), \ \sigma_{l+2}(v_0, \ldots, v_s), \ldots,$$

имеющая не менее трех членов, есть χ-последовательность [1].

ЛЕММА 5. *Пусть $v_0, \ldots, v_s$ и $r_0, \ldots, r_p$ – два множества неотрицательных чисел и $v_0 > 0$ и $r_0 > 0$. Тогда последовательность $\Delta_{k,m}(v_0, \ldots, v_s, r_0, \ldots, r_p), m = 0, 1, \ldots, k$, где $k \geqslant 2$ является χ-последовательностью [1].*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $\Psi(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и условиям Коши (7). Пусть также корни $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена $L_{n+1}(\lambda)$ являются положительными числами. Тогда последовательность маклореновских коэффициентов*

$$\frac{1}{(n+k)!}\Psi^{(n+k)}(0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

функции $\Psi(z)$ есть χ-последовательность.

Доказательство. Мы уже знаем, что

$$\frac{1}{(n+k)!}\Psi^{(n+k)}(0) = \frac{1}{(n+k)!}\sigma_k(\lambda_0, \ldots, \lambda_n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Легко проверить, что последовательность

$$b_{n,k} = \frac{1}{(n+k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

есть χ-последовательность. По лемме 4 последовательность $\sigma_k(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, $k = 0, 1, 2$,... есть χ-последовательность. Из леммы 2 следует, что последовательность (10) также является χ-последовательностью.

Рассмотрим поведение симметрического многочлена $\sigma_k(z_0, \ldots, z_n)$ на границе $U(\alpha)$ угловой области. Эта граница состоит из объединения двух лучей, выходящих из начала координат, угол между которыми равен α.

ТЕОРЕМА 4. *Если $z_0, \ldots, z_n \in U(\alpha)$, где $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$, то при $k \geqslant 1$ имеем $\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) \neq 0$ за исключением того случая, когда $z_0 = \ldots = z_n = 0$.*

Доказательство. При $z_0 = \ldots = z_n = 0$ имеем $\sigma_k(0, \ldots, 0) = 0$. Предположим, что среди чисел $z_0, \ldots, z_n$ есть хотя быодно число, отличное от нуля. Например, пусть $z_0 \neq 0$. Если все $z_0, \ldots, z_n$ лежат на одном луче из двух лучей, то очевидно $\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) \neq 0$. Пусть $z_0, \ldots, z_n$ лежат на разных сторонах угла. Разобьем множество точек $z_0, \ldots, z_n$ на два подмножества

$$\zeta_0 = p_0 e^{i\varphi}, \ldots, \zeta_s = p_s e^{i\varphi} \quad \text{и } \xi_0 = r_0 e^{i(\varphi+\alpha)}, \ldots, \xi_u = p_u e^{i(\varphi+\alpha)},$$

где $s + u + 1 = n$ и $p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_u$ – неотрицательные числа. Имеем

$$\sigma_k(\zeta_0, \ldots, \zeta_s, \xi_0, \ldots, \xi_u) = e^{ik\varphi} \sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}(p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_u) e^{im\alpha}.$$

По лемме 5 числа $\Delta_{k,m}(p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_u)$ образуют χ-последовательность. По теореме 1 получим, что многочлен

$$\sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}(p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_u) z^m \neq 0,$$

если $-2\pi/(k+1) < \arg z < 2\pi/(k+1)$. Так как $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$, то этот многочлен не обращается в нуль и при $z = e^{i\alpha}$. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть функция $\Psi(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению* (6) *и условиям Коши* (7). *Если корни $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена $L_{n+1}(\lambda)$ лежат на границе $U(\alpha)$ угловой области и $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$, то $\frac{1}{(n+k)!}\Psi^{(n+k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

Нам понадобится [2].

ЛЕММА 6. *Если при любых различных* $z_0, z_1 \in U(\alpha)$, *где* $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$, *для многочлена* $P(z) = z^{k+1} + a_1 z^k + \ldots + a_{k+1}$ *справедливо соотношение* $P(z_0) \neq P(z_1)$, *то этот многочлен является однолистной функцией в угловой области* $D(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 5. *Если* $z_0, \ldots, z_n \in D(2\pi/(k+1))$, *то* $\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) \neq 0$.

Доказательство. Запишем

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) = \frac{\sigma_{k+1}(z_0, z_2, \ldots, z_n) - \sigma_{k+1}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{z_0 - z_1}, \tag{11}$$

$$\sigma_k(z, z, z_2 \ldots, z_n) = \frac{\partial \sigma_{k+1}(z, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z}. \tag{12}$$

По теореме 4 имеем

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) \neq 0. \tag{13}$$

при любом $z_0, \ldots, z_n \in U(\alpha)$, где $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$ и $z_0, \ldots, z_n$ не все равны нулю. Из (11) и (13) следует

$$\sigma_{k+1}(z_0, \ldots, z_n) \neq \sigma_{k+1}(z_1, \ldots, z_n), \ \ z_0 \neq z_1, \ \ \forall z_2, \ldots, z_n \in U(\alpha). \tag{14}$$

При произвольно фиксированных $z_2, \ldots, z_n \in U(\alpha)$ выражение $\sigma_{k+1}(z, z_2, \ldots, z_n)$ будет многочленом степени $k+1$ относительно z со старшим коэффициентом, равным единице. Так как этот многочлен удовлетворяет (14), то к нему применима лемма 6, согласно которой он будет однолистной функцией в угловой области $D(\alpha)$. Это означает, что

$$\sigma_{k+1}(z_0, z_2, \ldots, z_n) \neq \sigma_{k+1}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \tag{15}$$

при любых различных $z_0, z_1 \in D(\alpha)$ и любых $z_2, \ldots, z_n \in U(\alpha)$. В силу формулы(12) и однолистности функции $\sigma_{k+1}(z, z_2, \ldots, z_n)$ в области $D(\alpha)$ при произвольно фиксированных $z_2, \ldots, z_n \in U(\alpha)$ имеем

$$\frac{d\sigma_{k+1}(z, z_2, \ldots, z_n)}{dz} \neq 0 \quad \forall z \in D(\alpha). \tag{16}$$

Применяя соотношение (16) и формулу (12), получим $\sigma_k(z, z, z_2, \ldots, z_n) \neq 0$ при любом $\forall z \in D(\alpha)$ и любых $z_2, \ldots, z_n \in U(\alpha)$. Объединяя (15) и (16), получим

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) \neq 0 \tag{17}$$

при любых $z_0, z_1 \in D(\alpha)$ и любых $z_2, \ldots, z_n \in U(\alpha)$. Далее, представим $\sigma_k(z_0, \ldots, z_n)$ в виде

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) = \frac{\sigma_{k+1}(z_0, z_1, z_3, \ldots, z_n) - \sigma_{k+1}(z_0, z_2, z_3, \ldots, z_n)}{z_1 - z_2} \tag{18}$$

и отметим также, что

$$\sigma_k(z_0, z, .z, z_3, \dots, z_n) = \frac{\partial \sigma_{k+1}(z_0, z, z_3, \dots, z_n)}{\partial z}. \tag{19}$$

Опираясь на (17), (18), (19), получим $\sigma_{k+1}(z_0, z_1, z_3, \dots, z_n) \neq \sigma_{k+1}(z_0, z_2, z_3, \dots, z_n)$ при любом $z_0 \in D(\alpha)$ и любых $z_1, \dots, z_n \in U(\alpha)$, но с условием, что $z_1 \neq z_2$. При произвольно фиксированных $z_0 \in D(\alpha)$ и $z_1, \dots, z_n \in U(\alpha)$ выражение $\sigma_{k+1}(z_0, z, z_3, \dots, z_n)$ является многочленом степени $k+1$ со старшим коэффициентом, равным единице. Рассуждая таким же образом, как и раньше и помня, что z_0 можно взять из угловой области $D(\alpha)$, получим $\sigma_k(z_0, \dots, z_n) \neq 0$ при любых $z_0, z_1, z_2 \in D(\alpha)$ и любых $z_3, \dots, z_n \in U(\alpha)$. В процессе дальнейших рассуждений, мы придем к соотношению $\sigma_k(z_0, \dots z_n) \neq 0$, $\forall z_0, \dots, z_n \in D(\alpha)$.

Следствие 4. *Пусть функция* $\Psi(z)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* (6) *с комплексными коэффициентами* $a_n, \dots, a_0$ *и условиям Коши* (7). *Если все корни* $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ *характеристического многочлена* $L_{n+1}(\lambda)$ *принадлежат угловой области* $D(\alpha)$, *где* $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$, *то* $\Psi^{(n+k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Литература

1. Э.Г. Кирьяцкий, О некоторых свойствах симметрического многочлена, *Liet. matem. rink.*, **43**(spec. nr.), 134–141.
2. А.И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, М.-Л., Гостехиздат (1950).

REZIUMĖ

E. Kirjackis, D. Kirjackis. Apie kai kurių specialiųjų polinomų šaknų išdėstymą

Straipsnyje nagrinėjama specialiųjų daugianarių šaknų pasiskirstymas. Gauti rezultatai taikomi tiriant tiesinės diferencialinės lygties su pastoviaisiais koeficientais sprendinių savybes.