Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 158–163

Об одном простейшем интерполяционном процессе в классе аналитических функций

Евгений КИРЬЯЦКИЙ, Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (ВГТУ)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Разделенную разность n-го порядка аналитической в ограниченной односвязной области D функции $F(z)$ определим формулой [1]

$$\big[F(z); z_0, \dots, z_n\big] = \int_\Gamma \frac{F(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi - z_0)\dots(\xi - z_n)},$$

где Γ – простой замкнутый контур, лежащий в области D и охватывающий все точки $z_0, \dots, z_n \in D$. Можно доказать, что разделенную разность $[F(z); z_0, \dots, z_n]$ можно представить в виде отношения двух определителей [2]

$$\big[F(z); z_0, \dots, z_n\big] = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \dots & z_0^{n-1} & F(z_0) \\ 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} & F(z_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} & F(z_n) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \dots & z_0^{n-1} & z_0^n \\ 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} & z_n^n \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Через $K_n(D)$ обозначим класс аналитических в области D функций $F(z)$, для которых n-ая разделенная разность $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$.

Замечание 1. Можно показать, что если разделенная разность $[F(z); z_0, \dots, z_n]$ отлична от нуля при попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$, то она отлична от нуля при любых $z_0, \dots, z_n \in D$. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы функция $F(z)$, не являющаяся многочленом степени не выше $n-1$, принадлежала классу $K_n(D)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $F(z) = T(z)$ имело в области D не более n корней для любого многочлена $T(z)$, степень которого не превышает $n-1$. Многочлен, степень которого не выше $n-1$, не принадлежит классу $K_n(D)$.*

Доказательство. Очевидно, для того чтобы $F(z) \in K_n(D)$ необходимо и достаточно, чтобы определитель, расположенный в числителе правой части формулы, определяющей разделенную разность, был отличен от нуля при любых попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in D$. Но тогда [3] функции $1, z, \ldots, z^{n-1}, F(z)$ образуют систему Чебышева в области D. Это эквивалентно тому, что уравнение $F(z) = T(z)$ имеет в области D не более n корней для любого многочлена $T(z)$, степень которого не превышает $n-1$, причем по условию $F(z)$ не является многочленом степени не выше $n-1$. Если $F(z)$ является многочленом степени не выше $n-1$, то из формулы для разделенной разности легко следует, что $[F(z); z_0, \ldots, z_n] = 0$ и поэтому $F(z) \notin K_n(D)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Теорема 1 утверждает, что для того чтобы $F(z) \in K_n(D)$ необходимо и достаточно, чтобы любой многочлен $T(z)$ степени не выше $n-1$ интерполировал функцию $F(z)$ не более чем в n точках.

ТЕОРЕМА 2 (понижение номера класса). *Пусть $F(z) = (z-\gamma)\psi(z)$ – аналитическая в области D функция и $\gamma \in D$. Если $F(z) \in K_n(D)$, то $\psi(z) \in K_{n-1}(D)$.*

Доказательство. Так как $F(z) \in K_n(D)$, то опираясь на теорему 1, заключаем, что уравнение

$$F(z) = (z-\gamma)(c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-2} z^{n-2})$$

имеет в области D не более n корней при любых $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$. Отсюда следует, что уравнение

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-2} z^{n-2}$$

имеет в области D не более $n-1$ корней при любых $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$. По теореме 1 функция $\psi(z) \in K_{n-1}(D)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $(z-\tau)^n \psi(z) \in K_n(D)$, где $\psi(z)$ – аналитическая в области D функция и $\tau \in D$. Тогда функция $\psi(z) \in K_0(D)$, т.е. $\psi(z) \neq 0$ в области D. Кроме того, функция $(z-\tau)^{n-1}[(z-\tau)\psi(z); z, \zeta] \in K_{n-1}(D)$ для дюбого $\zeta \in D$.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $F_k(z)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ – последовательность функций из класса $K_n(D)$, которая равномерно сходится внутри области D к функции $F(z)$. Тогда $F(z) \in K_n(D)$ или является многочленом степени не выше $n-1$ и такой многочлен не принадлежит классу $K_n(D)$.*

Доказательство. Фиксируем произвольным образом многочлен $T(z)$, степень которого не превосходит $n-1$. Так как $F_k(z) \in K_n(D)$, то по теореме 1 функции $F_k(z) - T(z)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ имеют в области D не более n корней. Применяя теорему о равномерной сходимости аналитических функций [4], получим, что функция $F(z) - T(z)$ имеет в области D не более n корней. Если $F(z)$ не является многочленом степени не выше $n-1$, то в силу произвольного выбора многочлена $T(z)$ получим по теореме 1, что $F(z) \in K_n(D)$. Если $F(z)$ является многочленом степени не выше $n-1$, то по той же теореме 1 получим $F(z) \notin K_n(D)$.

Основной целью нашей работы является формулировка и доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $E_x(z_0)$ – *круг* $|z-z_0|<x$ *и* ρ, r – *фиксированные числа, причем* $0<\rho<r$. *Пусть* $S(E_r(z_0))$ – *множество аналитических в круге* $E_r(z_0)$ *функций* $\varphi(z)$, $\varphi(z_0)=1$, *каждая из которых при фиксированном* $\tau \in E_\rho(z_0)$ *удовлетворяет условию*

$$(z-\tau)^n\varphi(z) \in K_n(E_r(z_0)), \quad n=0,1,2,3,\ldots. \tag{1}$$

Тогда множество $S(E_r(z_0))$ *состоит только из однопараметрического семейства функций вида*

$$\varphi(z)=\frac{1}{1-a(z-z_0)}. \tag{2}$$

Доказательство. Нам понадобятся некоторые леммы.

ЛЕММА 1. *Любая аналитическая функция* (2) *удовлетворяет условию* (1).

Доказательство. Рассмотрим уравнение $(z-\tau)^n\varphi(z)=T(z)$, где функция $\varphi(z)$ задана в виде (3) и $T(z)$ – произвольный многочлен степени не выше $n-1$. Ясно, что такое уравнение не может иметь в круге $E_r(z_0)$ более, чем n корней. Пользуясь теоремой 1, убеждаемся в справедливости леммы 1.

ЛЕММА 2. *Семейство* $S(E_r(z_0))$ *является компактным в себе множеством функций относительно равномерной сходимости внутри круга* $E_r(z_0)$.

Доказательство. В самом деле, полагая $n=1$ в (1), убедимся, согласно замечанию 2, в том, что $(z-\tau)\varphi(z) \in K_1(E_r(z_0))$, т.е. функция $h(z)=(z-\tau)\varphi(z)$ является однолистной в круге $E_r(z_0)$ и нормированной условиями $h(\tau)=0$, $h(z_0)=z_0-\tau$, если $z_0 \neq \tau$, и условиями $h(\tau)=0$, $h'(\tau)=1$, если $z_0=\tau$. В обоих случаях [5] получим, что множество однолистных функций $h(z)=(z-\tau)\varphi(z)$, где $\varphi(z) \in S(E_r(z_0))$, равномерно ограничено внутри $E_r(z_0)$. Но тогда и множество $S(E_r(z_0))$ функций $\varphi(z)$ равномерно ограничено внутри $E_r(z_0)$. Значит, любая равномерно сходящаяся последовательность функций $\varphi_k(z)$, $\varphi_k(z_0)=1$, $k=1,2,3,\ldots$ из множества $S(E_r(z_0))$ имеет своим пределом функцию $\varphi(z)$, $\varphi(z_0)=1$, которая будет принадлежать $S\,(E_r(z_0))$. Действительно, пусть m – произвольно фиксированное натуральное число. Так как $\varphi(z) \in S(E_r(z_0))$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, то $(z-\tau)^m \varphi_k(z) \in K_m(E_r(z_0))$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Применяя теорему 3, получим $(z-\tau)^m \varphi(z) \in K_m(E_r(z_0))$. В силу произвольного выбора числа m, получим $\varphi(z) \in S(E_r(z_0))$. Значит, $S(E_r(z_0))$ – компактное в себе множество функций.

ЛЕММА 3. *Пусть справедливо тождество*

$$\big[(z-\tau)h(z); z_0, z_0, \zeta\big] \equiv b\big[(z-\tau)h(z); z_0, \zeta\big]$$

по $\zeta \in \bar{E}_p(z_0)$, *где* b *– некоторое фиксированное число и* $h(z)$ *– аналитическая в круге* $E_r(z_0)$ *функция с условием* $h(z_0) = 1$. *Тогда функция* $h(z)$ *имеет вид*

$$h(z) = \frac{1}{1 - b(z - z_0)}. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим, что $z_0 = \tau$. В этом случае

$$\big[(z-\tau)h(z); z_0, z_0, \zeta\big] = \frac{1 - h(\zeta)}{z_0 - \zeta}, \qquad \big[(z-\tau)h(z); z_0, \zeta\big] = h(\zeta),$$

откуда следует (3).

Предположим теперь, что $z_0 \neq \tau$. В этом случае

$$\big[(z-\tau)h(z); z_0, z_0, \zeta\big] = \frac{(1 + (z_0 - \tau)h'(z_0))(z_0 - \zeta) - ((z_0 - \tau) - (\zeta - \tau)h(\zeta))}{(z_0 - \zeta)^2},$$

$$\big[(z-\tau)h(z); z_0, \zeta\big] = \frac{(z_0 - \tau) - (\zeta - \tau)h(\zeta)}{z_0 - \zeta}.$$

Отсюда

$$\frac{(1 + (z_0 - \tau)h'(z_0))(z_0 - \zeta) - ((z_0 - \tau) - (\zeta - \tau)h(\zeta))}{z_0 - \zeta} \equiv b\big((z_0 - \zeta) - (\zeta - \tau)h(\zeta)\big). \tag{4}$$

Полагая здесь $\zeta = \tau$, приходим к выводу, что $h'(z_0) = b$. Теперь, решая (4) относительно $h(\zeta)$, получим $h(\zeta) = (1 - b(\zeta - z_0))^{-1}$. Заменяя ζ на z, убеждаемся в справедливости леммы 3 в случае, когда $z_0 \neq \tau$.

Переходим к доказательству теоремы 4. Введем на $S(E_r(z_0))$ непрерывные вещественные функционалы $L[\varphi] = |a_1[\varphi]|$ и $L_m[\varphi] = |a_m[\varphi] - a_1^m[\varphi]|$, где $m \geqslant 2$ и произвольно фиксировано. Кроме того,

$$\varphi(z) = 1 + a_1[\varphi](z - z_0) + a_2[\varphi](z - z_0)^2 + \cdots.$$

Так как $S(E_r(z_0))$ по лемме 2 является компактным в себе множеством, то в нем найдется такая функция $\varphi_*(z)$, на которой функционал $L_m[\varphi]$ принимает свое наибольшее значение, скажем c_0, т.е.

$$0 \leqslant L_m[\varphi] \leqslant L_m[\varphi_*] = c_0, \quad \forall\varphi(z) \in S(E_r(z_0)). \tag{5}$$

Назовем $\varphi_*(z)$ максимальной функцией для функционала $L_m[\varphi]$. Обозначим через $S(E_r z_0; c_0)$ множество максимальных функций для функционала $L_m[\varphi]$ и рассмотрим непреры вный вещественный функционал $L[\varphi]$. Найдется такая максимальная функция $\varphi^*(z)$, для которой

$$L[\varphi] \leqslant L[\varphi^*] = c_1, \quad \forall\varphi(z) \in S\big(E_r(z_0); c_0\big). \tag{6}$$

Возьмем функцию

$$\varphi_\zeta^*(z) = \frac{[(z-\tau)\varphi^*(z); z, \zeta]}{[(z-\tau)\varphi^*(z); z_0, \zeta]}$$

и докажем, что $\varphi_\zeta^*(z) \in S(E_r(z_0))$ при любом $\zeta \in \bar{E}_p(z_0)$. В самом деле, $\varphi^*(z) \in S(E_r(z_0))$. Поэтому

$$(z-\tau)^n \varphi^*(z) \in K_n\big(E_r(z_0)\big), \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{7}$$

Учитывая (7) и пользуясь 3, получим

$$(z-\tau)^{n-1}\big[(z-\tau)\varphi^*(z); z, \zeta\big] \in K_{n-1}\big(E_r(z_0)\big), \quad \forall\zeta \in \bar{E}_p(z_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Отсюда уже следует, что $\varphi_\zeta^*(z) \in S(E_r(z_0))$, $\forall\zeta \in \bar{E}_p(z_0)$. Вспоминая, что $\varphi^*(z)$ – максимальная функция, имеем

$$L_m[\varphi_\zeta^*] \leqslant L_m[\varphi^*] = c_0, \quad \forall\zeta \in \bar{E}_p(z_0).$$

Но $\varphi_0^*(z) \equiv \varphi^*(z)$, поэтому $L_m[\varphi_0^*] = L_m[\varphi^*] = c_0$. Применяя принцип максимума к субгармонической функции $\psi(\zeta) = L_m[\varphi_\zeta^*]$, получим тождество $L_m[\varphi_\zeta^*] \equiv c_0$ относительно $\zeta \in \bar{E}_p(z_0)$, т.е. $\varphi_\zeta^*(z) \in S(E_r(z_0); c_0)$. Из (6) следует, что

$$L[\varphi_\zeta^*] \leqslant L[\varphi^*] = c_1, \quad \forall\zeta \in \bar{E}_p(z_0). \tag{8}$$

Еще раз применяя принцип максимума, получим

$$L[\varphi_\zeta^*] = \big|a_1[\varphi_\zeta^*]\big| = L[\varphi^*] = c_1. \tag{9}$$

Разложим функцию $\varphi_\zeta^*(z)$ в ряд по степеням $z - z_0$:

$$\varphi_\zeta^*(z) = 1 + \frac{[(z-\tau)\varphi^*(z); z_0, z_0, \zeta]}{[(z-\tau)\varphi^*(z); z_0, \zeta]}(z-\tau) + \cdots . \tag{10}$$

Опираясь на (8), (9), получим

$$\frac{[(z-\tau)\varphi^*(z); z_0, z_0, \zeta]}{[(z-\tau)\varphi^*(z); z_0, \zeta]} = c_1 e^{i\alpha}, \quad \alpha - \text{ вещественное число.}$$

Применяя лемму 3, найдем выражение для функции $\varphi^*(\zeta)$. Заменяя здесь ζ на z, приходим к тому, что

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{1 - c_1 e^{i\alpha}(z - z_0)} = 1 + c_1 e^{i\alpha}(z - z_0) + \cdots + c_1^m e^{im\alpha}(z - z_0)^m + \cdots . \quad (11)$$

Разложение (11) показывает, что $L_m[\varphi^*] = 0$ при любом $m \geqslant 2$. Значит, $c_0 = 0$. Это вместе с (5) приводит нас к равенству

$$L_m[\varphi] = 0, \quad m = 2, 3, \ldots, \quad (12)$$

справедливому для любой функции

$$\varphi(z) = 1 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots \in S(E_r(z_0)).$$

Полагая в (12) последовательно $m = 2, 3, 4, \ldots$, получим $a_2 = a_1^2$, $a_3 = a_1^3$, $a_4 = a_1^4$, и так далее. Значит, функция $\varphi(z)$ имеет вид (2). Вспоминая лемму 1, убеждаемся в справедливости теоремы 4.

Литература

1. И.И. Ибрагимов, *Методы интерполяции функций и некоторые их приложения*, Наука, Москва (1971).
2. В.А. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций*, Гостехиздат (1954).
3. В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва–Ленинград (1964).
4. Г.М. Голузин, *Геометричекая теория функций комплексного переменного*, Наука, М. (1966).
5. И.А. Александров, *Методы геометрической теории аналитических функций*, Томский госуниверситет, Томск (2001).

REZIUMĖ

J. Kirjackis, E. Kirijackis. Apie vieną paprasčiausių interpoliacinų procesų analizinių funkcijų klasėje

Darbe nagrinėjama klasė $K_n(D)$ analizinių srityje D funkcijų $F(z)$, kurių padalintas skirtumas $[F(z); z_0, \ldots, z_n] \neq 0$, $\forall z_0, \ldots, z_n \in D$. Nagrinėjamos funkcijų sekos $F_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, tenkinančios sąlygą $F_n(z) \in K_n(D)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Įrodyta ribos teorema

$$F_n(z) \in K_n(D), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, .$$