Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 174–179

О расположении корней некоторых квазиполиномов

Донатас ШВИТРА, Ингрида СИРВИДАЙТЕ (KU)
e-mail: matkat@gmf.ku.lt

Резюме. Рассматривается рассположение корней на комплексной плоскости некоторых квазиполиномов, появляющихся при линейном анализе важных в технических приложениях дифференциально-разностных уравнений локатора и процесса горения в жидкостном ракетном двигателе (ЖРД). Аналогичное исследование проводится и для логистического уравнения с запаздыванием нейтрального типа, появляющегося в математической экологии.

1. Квазиполином уравнения локатора

Дифференциально-разностное уравнение локатора или так называемое уравнение Минорского [1]

$$\ddot{x} + 2A\dot{x} + x + 2E\left[\dot{x}(t-h) - p\dot{x}^2(t-h) - \dot{x}^3(t-h)\right] = 0, \tag{1.1}$$

где A, E, p, h – неотрицательные параметры, исследовалось в [2–4]. Для нелинейного анализа уравнения (1.1) важнейшим является установление расположения корней характерического уравнения

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2A\lambda + 1 + 2E\lambda\exp(-\lambda h) = 0 \tag{1.2}$$

линейной части (1.1) на комплексной плоскости в зависимости от изменения параметров A и E при фиксированных значениях запаздывания h.

Исследование проведем при помощи хорошо известного метода D-разбиения [5].

У уравнения (1.2) нет нулевого корня. Далее, пусть $\lambda = i\sigma$ $(\sigma > 0)$. Тогда из (1.2) на плоскости параметров OAE получим кривые D-разбиения

$$E = \frac{\sigma^2 - 1}{2\sigma\sin\sigma h}, \tag{1.3}$$

$$A = -E\cos\sigma h. \tag{1.4}$$

заданные параметрически и изображенные на рис. 1.1–1.2.

ЛЕММА 1. *Область D_0 (см. рис. 1.1–1.2) является областью асимптотической устойчивости дифференциального уравнения (1.1), т.е. в ней все корни квазиполинома (1.2) имеют отрицательные действительные части.*

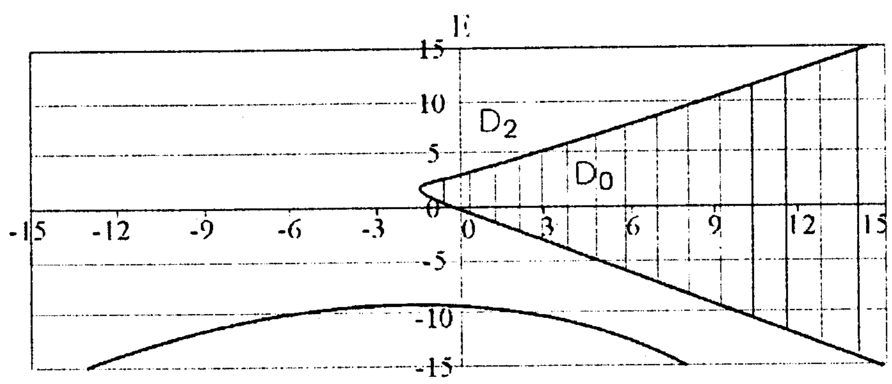

Рис. 1.1. ($h = 0,25$).

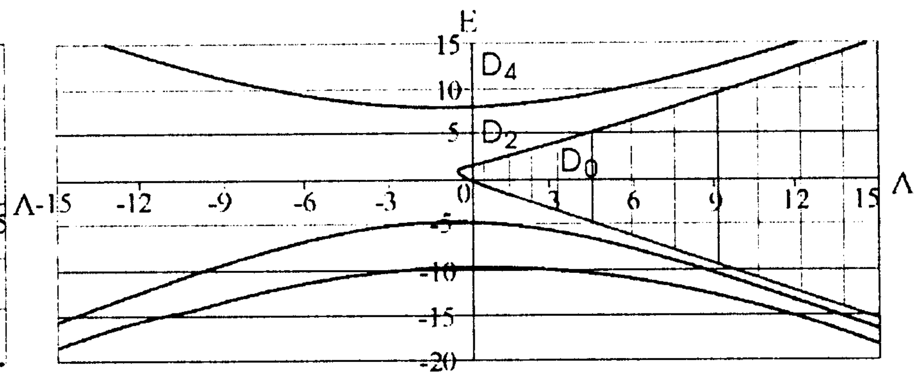

Рис. 1.2. ($h = 1$).

Доказательство. Область D_0 является связной, поэтому [5] достаточно убедиться, что хотя бы одна ее точка соответствует квазиполиному, все нули которого имеют отрицательные действительные части. Действительно, пусть $E = 0$. Тогда, очевидно, квазиполином (1.2) имеет всего два корня $\lambda_{1,2} = -A \pm \sqrt{A^2 - 1}$, у которых при $A > 0$ действительные части являются отрицательными, т.е. $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Отсюда следует, что область D_0 является областью асимптотической устойчивости, т.е. в ней $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Далее, очевидно, что в области D_2 у характеристического квазиполинома (1.2) появляются два корня с положительной действительной частью, причем остальные его корни имеют отрицательные действительные части. Выделение области D_2 является важным при построении автоколебаний дифференциального уравнения (1.1) [3, 4].

Следует отметить и книгу [6], в которой рассмотрены свойства устойчивости нулей квазиполиномов, однако о важном в приложениях методе D-разбиения там не говорится.

2. Квазиполином уравнения процесса горения в ЖРД

В [4, 7] было выведено дифференциально-разностное уравнение

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta p)\dot{x} + \alpha\beta p x + \gamma x[t - \Delta(x, \dot{x}, p)] = \delta_1 x \dot{x} + \delta_2 x^2, \tag{2.1}$$

описывающее возмущение скорости впрыска топлива в камеру сгорания ЖРД. Пусть $h > 0$ является постоянной частью функции Δ в (2.1). Пусть, далее, $\alpha = \beta = 1$. Тогда квазиполином

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + (1 + p)\lambda + p + \gamma \exp(-\lambda h) = 0 \tag{2.2}$$

является характеристическим для линейной части дифференциального уравнения (2.1).

Пусть квазиполином (2.2) имеет корень $\lambda = 0$. Тогда прямая $p + \gamma = 0$ является одной из линий, образующих границу D-разбиения плоскости параметров λ и p. Пусть теперь квазиполином (2.2) имеет чисто мнимый корень $\lambda = i\sigma$. Тогда из (2.2), отделяя действительную и мнимую части, получим уравнения остальных кривых разбиения в параметрической форме

$$p = \frac{\sigma(\sigma \sin\sigma h - \cos\sigma h)}{\sin\sigma h + \sigma\cos\sigma h}, \tag{2.3}$$

$$\gamma = \frac{\sigma(1+\sigma^2)}{\sin\sigma h + \sigma\cos\sigma h}. \tag{2.4}$$

При из (2.3)–(2.4) получим так называемую [5] точку возврата

$$p_0 = -\frac{1}{1+h}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{1+h}. \tag{2.5}$$

Тогда (2.5) и кривые (2.3)–(2.4) образуют D-разбиение плоскости параметров p и γ (см. рис. 2.1–2.2).

ЛЕММА 2. *Область D_0 (см. рис. 2.1–2.2) является областью асимптотической устойчивости дифференциального уравнения* (2.1), *в области D_1 появляется один корень с положительной действительной частью, в области D_2 – два таких корня, причем все остальные корни квазиполинома* (2.2) *имеют отрицательные действительные части.*

Доказательство. Пусть $\gamma = 0$. Тогда квазиполином (2.2) имеет два корня $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -p$. Очевидно, что для всех точек корни квазиполинома (2.2) удовлетворяют неравенству Re $\lambda < 0$. Отсюда следует [5], что область D_0 является областью асимптотической устойчивости дифференциального уравнения (2.1). Отсюда же следует, что в области D_1 появляется один корень с положительной действительной частью.

Далее, пусть $\lambda = 0$. Вычислим дифференциал действительной части на прямой $p + \gamma = 0$. Из (2.2) следует, что

$$d\tau = -\mathrm{Re}\frac{P'_p dp + P'_\gamma d\gamma}{P'_\lambda}.$$

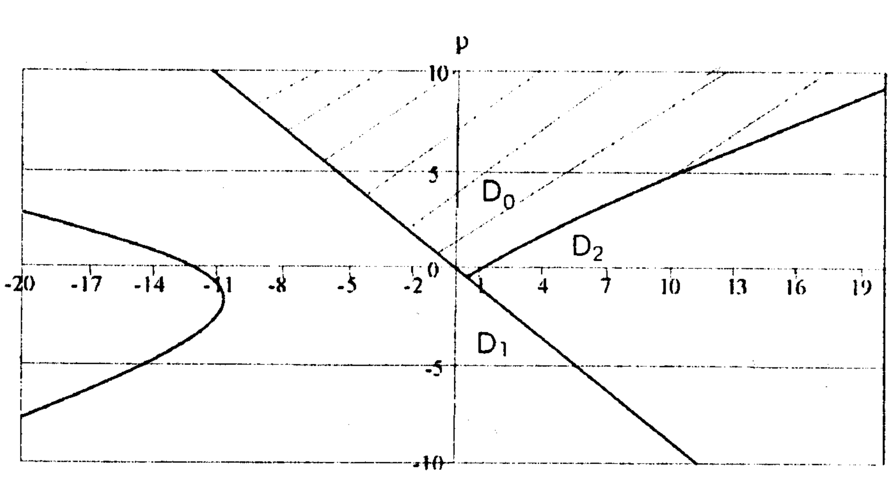

Рис. 2.1. ($h = 1$).

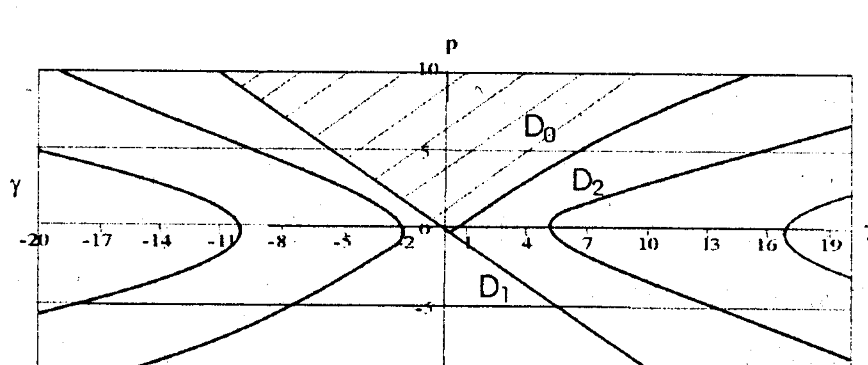

Рис. 2.2. ($h = 3$).

На прямой $p+\gamma = 0$ квазиполином (2.2) имеет нулевой корень $\lambda = 0$. Далее, $p=-\gamma$, $P'_p = P'_\gamma = 1$, $P'_\lambda = 1+p(1+h)$, поэтому

$$d\tau = -\frac{dp+d\gamma}{1+p(1+h)}.$$

Следовательно, при фиксированном $p < p_0 = -\frac{1}{1+h}$ и при увеличении γ, действительная часть корня , равная нулю на этой прямой, получает положительное приращение

$$d\tau = -\frac{d\gamma}{1+p(1+h)}.$$

Это означает, что в области D_2 два корня квазиполинома (2.2) имеют положительную действительную часть.

Это завершает доказательство леммы.

3. Квазиполином модифицированного логистического дифференциального уравнения с запаздыванием нейтрального типа

Дифференциальное уравнение

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left[1+a\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)-\frac{N(t-h)+\rho\dot{N}(t-h)}{K}\right], \tag{3.1}$$

где r, h, ρ, K – неотрицательные параметры, при $a = 0$ было выведено и исследовалось в [8, 9]. После замены $N(t) = K[1+x(t)]$ (где K – верхняя асимптота величины популяции) из (3.1) получим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + r[1+x(t)][ax(t)+x(t-h)+\rho\dot{x}(t-h)] = 0,$$

для линейной части которого характеристическим является уравнение

$$P(\lambda) \equiv \lambda[1+\alpha\exp(-\lambda h)] + ra + r\exp(-\lambda h) = 0, \tag{3.2}$$

где $\alpha = \rho r$.

Пусть $r = 0$. Тогда квазиполином (3.2) имеет корень $\lambda = 0$. Далее, пусть $\lambda = i\sigma$ $(\sigma > 0)$. Из (3.2), отделяя вещественную и мнимую части, получим остальные кривые D-разбиения плоскости параметров r и α:

$$r = \frac{\sigma\sin\sigma h}{1+a\cos\sigma h}, \tag{3.3}$$

$$\alpha = -\frac{a+\cos\sigma h}{1+a\cos\sigma h}. \tag{3.4}$$

При $\sigma \to 0$ из (3.3)–(3.4) получим точку возврата

$$(r_0, \alpha_0) = (0, -1). \tag{3.5}$$

Точка (3.5) и кривые (3.3)–(3.4) приведены на рис. 3.1–3.2 при $h = 1$.

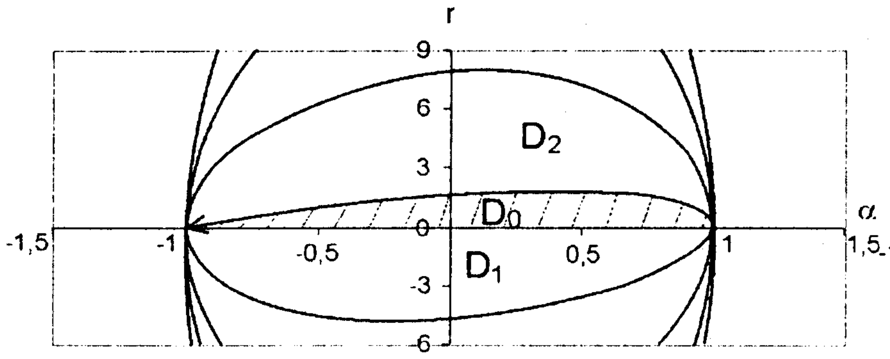

Рис. 3.1. ($a=0$).

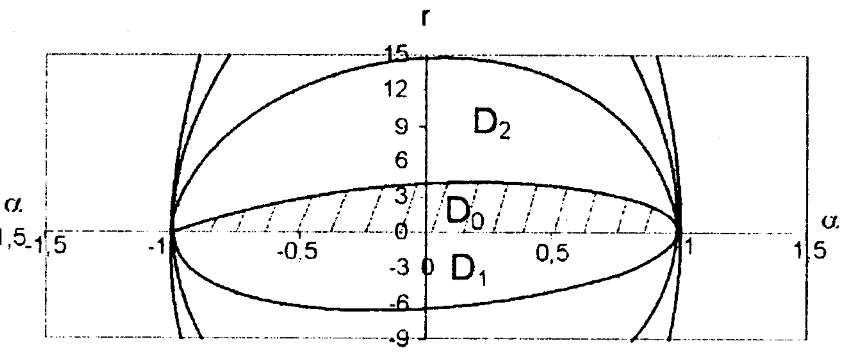

Рис. 3.2. ($a=0,8$).

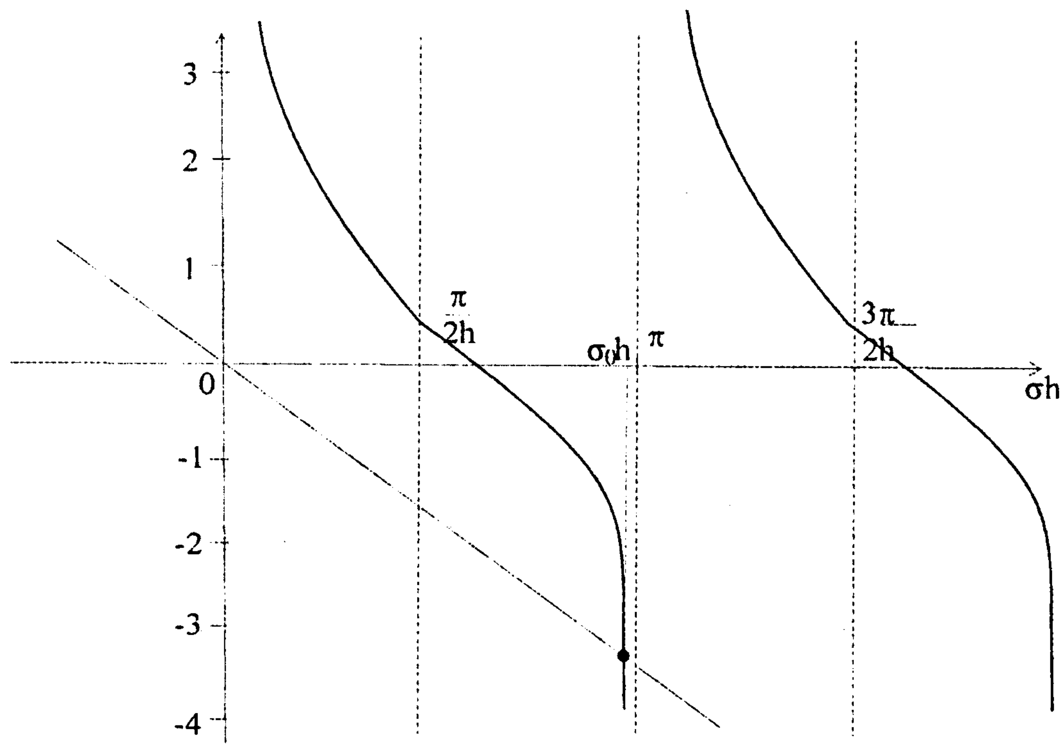

Рис. 3.3. ($\rho=h=1,\ a=0,8$).

ЛЕММА 3. *Область D_0 (см. рис. 3.1–3.2) является областью асимптотической устойчивости состояния равновесия $N(t)\equiv K$. В области D_1 появляется один корень с положительной действительной частью, а в области D_2 – два таких корня.*

Доказательство леммы легко следует из свойств характеристического квазиполинома

$$P(\lambda)=\lambda+r\exp(-\lambda h),$$

изложенных в [9]. Отсюда также следует утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Характеристический квазиполином* (3.2) *при фиксированных ρ и α имеет пару простых мнимых корней $\pm i\sigma_0$, а все остальные корни имеют отрицательные действительные части, если $r=r_0$, где*

$$r_0=\frac{\sigma_0\sin\sigma_0 h}{1+a\cos\sigma_0 h},$$

а σ_0 единственный корень уравнения

$$\frac{a+\cos\sigma h}{\sin\sigma h}=-\frac{\rho}{h}\sigma h,$$

принадлежащий интервалу $\left(\frac{\pi}{2h},\frac{\pi}{h}\right)$ (см. рис. 3.3).

Литература

1. N. Minorsky, Self-excited mechanical oscillations, *J. Appl. Phys.*, **19**, 332–338 (1948).
2. Э. Пинни, *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения*, Москва, ИЛ (1961).
3. Д.И. Швитра, Исследование автоколебаний уравнения Минорского, *Лит. матем. сборник*, **14**(2), 171–176 (1974).
4. Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра, *Автоколебания в системах с запаздыванием*, Вильнюс, Мокслас (1979).
5. Ю.И. Неймарк, Структура D-разбиения пространства квазиполиномов у диаграммы Вышнеградского и Найквиста, *ДАН СССР*, **60**, 1503–1506 (1948).
6. К. Бельман, К. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Москва, Мир (1967).
7. Ю.Ц. Колесов , Д.И. Швитра, Математическое моделирование процесса горения в камере жидкостного ракетного двигателя, *Лит. матем. сборник*, **15**(4), 153–167 (1975).
8. K. Gopalsamy, B. Zhang, On neutral delay logistic equation, *Dynamics and Stability Systems*, **2**, 183–195 (1988).
9. Д.И. Швитра, Логистическое дифференциальное уравнение с запаздыванием нейтрального типа, *Лит. матем. сборник*, **37**(2), 224–232 (1997).

SUMMARY

D. Švitra, I. Sirvydaitė. About the location of some quasipolinomial roots

The location of quasipolinomial roots in a complex plane that appear while we investigate differential equations of the locator and the combustion process in the rocket engine is analysed. The same research is carried out for a differential equation with delay of neutral type appearing in mathematical ecology.

Keywords: quasipoliomial, roots, asymptotic stability