Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 415–419

Brandos ir pirmosios sesijos universitete matematikos egzaminų statistinė analizė

Stasys ČIRBA, Jonas DAUNORAVIČIUS, Juozas RAULYNAITIS (VGTU)
el. paštas: techn@meli.lt

Turėdami 2003 m. priimtųjų studijuoti VGTU matematikos brandos egzamino įvertinimus ir jų pirmosios sesijos matematikos pažymius, atlikome šių įvertinimų statistinę analizę, taikydami vienfaktorinės dispersinės analizės metodą [1].

1. Visi priimtieji studijuoti VGTU suskirstyti į tris grupes pagal matematikos brandos egzamino lygį: pirmajai grupei priskirti tie priimtieji studijuoti, kurie laikė valstybinį matematikos brandos egzaminą ir gavo įvertinimą $\geqslant 50$; antrajai grupei – laikiusieji valstybinį matematikos brandos egzaminą ir gavusieji įvertinimą < 50; trečiajai – laikiusieji mokyklinį matematikos brandos egzaminą. Taigi lygių imame 3; $i = 1, 2, 3$ – lygių numeriai.

Pagrindinis atsitiktinis dydis X – pirmosios sesijos matematikos pažymys. Kitas atsitiktinis dydis A – matematikos brandos egzaminas, nagrinėjamas kaip faktorius. Tarkime, kad $X \backsim N(a, \sigma)$ ir i-osios grupės reikšmės, gautos esant fiksuotam faktoriaus A lygiui A_i, yra normaliai pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio $X_i \backsim N(a_i, \sigma_i)$ n_i didumo imtis ($i = 1, 2, 3$). Be to, tarkime, kad X_i nepriklausomi ir kad jų dispersijos sutampa, t.y. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$. Norėdami patikrinti faktoriaus A reikšmingumą, tikrinsime statistinę hipotezę, kad vidutinė atsitiktinio dydžio X reikšmė nepriklauso nuo faktoriaus A, t.y. $H_0 : a_1 = a_2 = a_3 = a$ su alternatyva, kad vidurkiai nėra lygūs. Pažymime x_{ij} – j-ojo studento, laikiusio i-ojo lygio matematikos brandos egzaminą, pirmosios sesijos matematikos pažymį. Kiekvienam VGTU fakultetui apskaičiuojame grupinius vidurkius $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ ir visos imties vidurkį $\overline{x}$: $\overline{x}_i = \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $(i = 1, 2, 3)$, $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{3} n_i \cdot \overline{x_i}$; čia n_i – skaičius studentų, laikiusių pirmosios sesijos matematikos egzaminą, o prieš tai laikiusių i-ojo lygio matematikos brandos egzaminą, $n = n_1 + n_2 + n_3$. Apibendrinti duomenys ir skaičiavimo rezultatai pateikti 1 lentelėje.

Atkreipiame dėmesį, kad pirmosios sesijos matematikos egzamino nelaikė 10,1% priimtųjų studijuoti VGTU, detaliau: nelaikė 6,2% turinčių valstybinio matematikos brandos egzamino įvertinimą $\geqslant 50$; 11,6% turinčių valstybinio matematikos brandos egzamino įvertinimą < 50; 18,2% priimtųjų studijuoti ir nelaikiusių valstybinio matematikos brandos egzamino. Elektronikos fakultete (EF) šie skaičiai yra tokie:

1 lentelė. Laikiusiųjų egzaminą skaičius ir vidurkiai

Fakultetas	n_1	n_2	n_3	n	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	$\overline{x}$
AGAI	24	40	16	80	5,88	5,56	4,20	5,43
AIF	139	223	41	403	5,50	3,96	2,89	4,41
AF	66	18	4	88	8,89	6,94	6,00	8,44
EF	193	131	30	354	5,89	4,24	3,60	5,14
FMF	217	52	3	272	5,82	5,19	4,00	5,69
MF	32	166	130	328	6,25	5,01	3,98	4,76
SF	181	227	73	481	6,65	4,43	3,31	5,10
TIF	148	104	12	264	6,32	5,24	3,53	5,78
VVF	308	5	3	316	6,67	4,80	1,33	6,59
VGTU	1308	966	312	2586	6,33	4,62	3,63	5,39

14,3%; 10,2%; 15,3%; 27,3%. Be to, 1 lentelėje matome, kad į Architektūros fakultetą (AF), Fundamentinių mokslų fakultetą (FMF) ir Verslo vadybos fakultetą (VVF) priimtieji praktiškai visi yra laikę valstybinį matematikos brandos egzaminą ($n_3 = 3$ arba 4), o VVF praktiškai visi yra laikę valstybinį matematikos brandos egzaminą ir gavę įvertinimą ne mažesnį už 50; $\overline{x}_1$ mažiausias Aplinkos inžinerijos fakultete (AIF), $\overline{x}_2$ mažiausias AIF, $\overline{x}_3$ beveik mažiausias tame pačiame AIF, $\overline{x}$ mažiausias AIF. Matome, kad kontingentas Mechanikos fakultete (MF) silpnesnis nei AIF, tačiau $\overline{x}(MF) = 4,76 > \overline{x}(AIF) = 4,41$.

Toliau apskaičiuojame tarpgrupinę (faktorinę) nuokrypių kvadratų sumą $Q_1 = \sum_{i=1}^{3} n_i\,(\overline{x_i} - \overline{x})^2$, charakterizuojančią grupinių vidurkių išsisklaidymą apie bendrą vidurkį $\overline{x}$, liekamąją nuokrypių kvadratų sumą $Q_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \overline{x_i}\right)^2$, charakterizuojančią reikšmių x_{ij} išsisklaidymą apie grupių vidurkius $\overline{x}_i$, kurį grupių viduje lemia įvairios atsitiktinės priežastys, bet ne nagrinėjamas faktorius, dispersijas $S_1^2 = \frac{1}{3-1} \cdot Q_1, S_2^2 = \frac{1}{n-3} \cdot Q_2$ ir Fišerio statistikos $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(3-1, n-3)$ reikšmę. Skaičiavimo rezultatai surašyti 2 lentelėje. Šios lentelės priešpaskutiniame stulpelyje skliaustuose užrašytos Fišerio atsitiktinio dydžio kritinės reikšmės, kai reikšmingumo lygmuo yra 0,01. Daugeliu atvejų apskaičiuotoji Fišerio statistikos reikšmė yra didesnė už kritinę reikšmę, todėl išvada: teoriniai vidurkiai nėra lygūs. Tik FMF studentų pirmosios sesijos rezultatams neturėjo įtakos, ar matematikos brandos egzaminas laikytas valstybinis, ar mokyklinis.

Brandos egzamino lygio įtaką pirmosios sesijos rezultatams apibūdina santykinis matas $\eta^2 = \frac{Q_1}{Q_1+Q_2}$ [2], kurio reikšmės yra pateiktos 2 lentelės paskutiniame stulpelyje. Pvz., η^2 (AGAI) = 0,13. Tai reiškia, kad 13% pirmosios sesijos matematikos pažymį lemia atsitiktiniai faktoriai, o 87% - nagrinėjamas faktorius.

2. Išskyrus FMF atvejį nagrinėsime tris atsitiktinių dydžių poras (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_2, X_3). Čia X_1 reiškia VGTU studentų pirmosios sesijos matematikos žinias, kai matematikos brandos egzaminas laikytas valstybinis ir gautas įvertinimas ne mažesnis

2 lentelė. Brandos egzamino įtaka pirmosios sesijos rezultatams

Fakultetas	Q_1	Q_2	S_1^2	S_2^2	$F_{sk.}$, $(F_{kr.})$	η^2
AGAI	29,74	206,07	14,87	0,63	23,45 (4,89)	0,13
AIF	305,03	1397,54	152,51	4,30	35,47 (4,66)	0,18
AF	77,68	360,90	38,84	1,11	34,98 (4,86)	0,18
EF	285,82	2025,32	142,91	6,23	22,93 (4,67)	0,12
FMF	25,24	1539,22	12,62	4,74	2,66 (4,69)	0,02
MF	160,51	1300,89	80,26	4,00	20,05 (4,67)	0,11
SF	770,65	1763,44	385,33	5,43	71,02 (4,65)	0,30
TIF	134,23	1147,96	67,12	3,53	19,00 (4,69)	0,10
VVF	100,99	1295,11	50,50	3,98	12,67 (4,67)	0,07
VGTU	2694,94	12195,50	1347,47	37,52	35,91 (4,61)	0,18

už 50; X_2 – pirmosios sesijos matematikos žinios, kai matematikos brandos egzaminas laikytas valstybinis ir gautas įvertinimas mažesnis už 50; X_3 – pirmosios sesijos matematikos žinios, kai laikytas mokyklinis matematikos brandos egzaminas. Iš pradžių tikrinsime dispersijų lygybės hipotezes $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $\sigma_1^2 = \sigma_3^2$, $\sigma_2^2 = \sigma_3^2$, taikydami Fišerio reikšmingumo kriterijus:

$$F_{12} = \frac{S_{21}^2}{S_{22}^2} \quad \text{arba } F_{12} = \frac{S_{22}^2}{S_{21}^2} \quad \text{(apskaičiuotoji Fišerio statistikos reikšmė turi būti didesnė už 1);}$$

$$F_{13} = \frac{S_{21}^2}{S_{23}^2} \quad \text{arba } F_{13} = \frac{S_{23}^2}{S_{21}^2} \quad \text{(imama didesnė už 1 trupmena);}$$

$$F_{23} = \frac{S_{22}^2}{S_{23}^2} \quad \text{arba } F_{23} = \frac{S_{23}^2}{S_{22}^2} \quad \text{(imama didesnė už 1 trupmena).}$$

Čia empirinės dispersijos apibrėžiamos taip:

$$S_{2i}^2 = \frac{1}{n_i - 1} \cdot Q_{2i} = \frac{1}{n_i - 1} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \overline{x_i}\right)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Skaičiavimo rezultatai pateikiami 3 lentelėje. Joje skaičiavimų kontrolės sumetimais įrašyta ir FMF eilutė.

4 lentelėje greta apskaičiuotų (didesnių už 1) Fišerio statistikos reikšmių skliaustuose nurodytos kritinės reikšmės:

$$F_{12kr.} = f_{n_1-1;n_2-1;0{,}01}, \quad \text{jei } S_{21}^2 > S_{22}^2 \left(F_{12kr.} = f_{n_2-1;n_1-1;0{,}01}, \quad \text{jei } S_{22}^2 > S_{21}^2\right),$$

$$F_{13kr.} = f_{n_1-1;n_3-1;0{,}01}, \quad \text{jei } S_{21}^2 > S_{23}^2 \left(F_{13kr.} = f_{n_3-1;n_1-1;0{,}01}, \quad \text{jei } S_{23}^2 > S_{21}^2\right),$$

$$F_{23kr.} = f_{n_2-1;n_3-1;0{,}01}, \quad \text{jei } S_{22}^2 > S_{23}^2 \left(F_{23kr.} = f_{n_3-1;n_2-1;0{,}01}, \quad \text{jei } S_{23}^2 > S_{22}^2\right).$$

3 lentelė. Dispesijų lygybės tikrinimas

Fakultetas	Q_{21}	Q_{22}	Q_{23}	S_{21}^2	S_{22}^2	S_{23}^2
AGAI	65,17	106,86	31,04	2,83	2,82	2,07
AIF	539,32	702,09	156,12	3,91	3,16	3,90
AF	234,82	94,08	32,00	3,61	5,53	10,67
EF	1117,06	791,55	116,70	5,82	6,09	4,02
FMF	1279,78	253,44	6,00	5,92	4,97	3,00
MF	143,92	695,52	461,45	4,64	4,22	3,58
SF	832,15	679,89	251,40	4,62	3,01	3,49
TIF	641,96	475,53	30,47	4,37	4,62	2,77
VVF	1281,62	12,80	0,69	4,17	3,20	0,35
VGTU	6881,52	4139,89	1174,09	5,27	4,29	3,78

4 lentelė. Fišerio statistikų reikšmės

Fakultetas	$F_{12sk.}$ ($F_{12kr.}$)	$F_{13sk.}$ ($F_{13kr.}$)	$F_{23sk.}$ ($F_{23kr.}$)
AGAI	1,01 (2,32)	1,37 (3,31)	1,36 (1,85)
AIF	1,24 (1,42)	1,00 (1,90)	1,23 (1,68)
AF	1,53 (2,25)	2,95 (4,09)	1,93 (5,19)
EF	1,05 (1,45)	1,45 (2,10)	1,51 (2,13)
FMF	1,19 (1,74)	1,97 (99,50)	1,66 (99,50)
MF	1,10 (1,80)	1,30 (1,84)	1,18 (1,48)
SF	**1,54 (1,39)**	1,32 (1,62)	1,16 (1,53)
TIF	1,06 (1,51)	1,58 (3,68)	1,67 (3,70)
VVF	1,30 (13,49)	12,04 (99,54)	9,23 (99,25)
VGTU	**1,23 (1,15)**	**1,39 (1,24)**	1,13 (1,25)

Iš 4 lentelės matome, kad dauguma atvejų $F_{sk.} < F_{kr.}$, todėl šiais atvejais galima teigti, kad atitinkami teoriniai vidutiniai kvadratiniai nuokrypiai arba teorinės dispersijos yra lygios. Išimtys lentelėje paryškintos.

Kai teorinės dispersijos lygios, tikrinsime hipotezes, kad atitinkami teoriniai vidurkiai yra lygūs ($a_1 = a_2, a_1 = a_3, a_2 = a_3$), taikydami Stjudento reikšmingumo kriterijus:

$$T_{1i} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_i}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_{21}^2+(n_i-1)S_{2i}^2}{n_1+n_i-2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_i}\right)}}, \quad (i = 2, 3),$$

$$T_{23} = \frac{\overline{x_2} - \overline{x_3}}{\sqrt{\frac{(n_2-1)S_{22}^2+(n_3-1)S_{23}^2}{n_2+n_3-2} \cdot \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)}}.$$

Skaičiavimų rezultatai pateikti 5 lentelėje.

5 lentelė. Vidurkių lygybės tikrinimas

Fakultetas	$T_{12sk.}$ ($T_{12kr.}$)	$T_{13sk.}$ ($T_{13kr.}$)	$T_{23sk.}$ ($T_{23kr.}$)
AGAI	0,74 (2,39)	**3,27 (2,43)**	**2,85 (2,40)**
AIF	**7,67 (2,34)**	**7,43 (2,35)**	**3,48 (2,34)**
AF	**3,66 (2,37)**	**2,83 (2,38)**	0,68 (2,53)
EF	**5,99 (2,34)**	**4,94 (2,34)**	1,32 (2,35)
FMF	1,70 (2,34)	1,29 (2,34)	0,91 (2,40)
MF	**3,10 (2,33)**	**5,91 (2,33)**	**4,43 (2,33)**
SF	11,54 (2,33)	**11,62 (2,34)**	**4,71 (2,34)**
TIF	**3,99 (2,34)**	**4,51 (2,35)**	**2,66 (2,36)**
VVF	2,03 (2,34)	**4,52 (2,34)**	**3,17 (3,14)**
VGTU	18,30 (2,33)	19,20 (2,33)	**7,45 (2,339)**

Greta apskaičiuotų Stjudento statistikos reikšmių skliaustuose užrašytos kritinės reikšmės, kai reikšmingumo lygmuo 0,01 ir alternatyvioji hipotezė parenkama su ženklu > ($a_1 > a_2$, $a_1 > a_3$, $a_2 > a_3$): $T_{12kr.} = t_{n_1+n_2-2;0,01}$, $T_{13kr.} = t_{n_1+n_3-2;0,01}$, $T_{23kr.} = t_{n_2+n_3-2;0,01}$.

Šioje lentelėje išryškinti atvejai, kai priimtųjų studijuoti VGTU pirmosios sesijos matematikos pažymys aiškiai priklauso nuo matematikos brandos egzamino lygio.

Išvados

1. Pirmosios sesijos matematikos egzamino rezultatams turi įtaką tai, kokiu lygiu laikytas matematikos brandos egzaminas.
2. Esminę įtaką pirmosios sesijos matematikos egzamino rezultatams turi kaip tik matematikos brandos egzaminas, o ne kiti atsitiktiniai faktoriai.

Literatūra

1. G. Krameras, *Statistikos matematiniai metodai*, Mir, Maskva (1975) (rusų k.).
2. V. Čekanavičius, G. Murauskas, *Statistika II ir jos taikymai*, TEV, Vilnius (2004).

SUMMARY

S. Čirba, J. Daunoravičius, J. Raulynaitis. Statistical analysis of mathematical marks in secondary schools and University

In this article statistical analysis and influence of marks of mathematics in middle school to marks in winter session is described. The findings of the investigation indicates that the results of the University first session examination in mathematics depend on what level a pupil took the examination before entering the University. Namely, the results are essentially influenced by factor whether a pupil took the examination at a state examination center or at school.

Keywords: statistical anlysis, secondary school, egzamination.