Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 516–520

Конусы и проекторы на них как примеры неортомодулярных логик

Григорий МЕЛЬНИЧЕНКО (VPU)
e-mail: grimel@vpu.lt

1. Введение

Логические высказывания квантовой логики отождествляются с замкнутыми подпространствами гильбертова пространства, образующими ортомодулярную орторешетку, в которой отношение порядка $\leqslant$ – теоретико-множественное включение подпространств, логические операции $\vee, \wedge$ – операции решетки – sup, inf, а операция ортодополнения – ортогональное дополнение $^{\perp}$ [1], [2], [7].

В квантовой механике высказывания квантовой логики отождествляются не с подпространствами, а с соответствующими им проекторами, которые называют инструментами. Множество проекторов – орторешетка с отношением порядка $P_1 \leqslant P_2$ определенным следующим образом: $\langle P_1 x, x\rangle \leqslant \langle P_2 x, x\rangle$ для $\forall x \in H$ [1].

Квантовая логика как алгебра инструментов применима не только в квантовой механике, но и при распознавании сигналов [6].

Цель работы – показать, что замкнутые конусы гильбертова подпространства, а также проекторы на них – неортомодулярные логики, включающие в себя соответственно ортомодулярные квантовые логики подпространств и проекторов на них.

2. Результаты

Все результаты доказываются для действительного гильбертова пространства H, быть может, бесконечномерного. Как известно в гильбертовом пространстве справедливо тождество:

$$||a-b||^2 = ||a||^2 - 2\langle a, b\rangle + ||b||^2. \tag{1}$$

Множество $K \subseteq H$ называется выпуклым конусом, если

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in K \quad \text{для } \forall x_1, x_2 \in K,\ \forall \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0. \tag{2}$$

Ясно, что выпуклый конус – выпуклое множество. Выпуклый конус K^* сопряжен к конусу K, если

$$K^* = \{x : \langle x, y\rangle \leqslant 0 \quad \text{для всех } y \in K\}. \tag{3}$$

Пусть $C \subseteq H$ – замкнутое выпуклое множество. Хорошо известно [4], что для $\forall x \in H$ существует единственный элемент $x_0 \in C$, что

$$||x - x_0|| = \inf_{y \in} ||x - y||. \qquad (4)$$

Отображение $x_0 = Px$ – это проекция элемента x на множество C.

Частично упорядоченное множество называется решеткой, если для каждой пары $\{a, b\}$ определены верхняя $a \vee b = \sup\{a, b\}$ и нижняя $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ грани [2]. Орторешетка – это решетка с $0, 1$ и операцией ортодополнения такой, это $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$, $(a)'' = a$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ [2]. Если $a \leqslant b \to a \vee (a' \wedge b) = b$, то орторешетка называется ортомодулярной [2].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть элемент $x \in H$ и $x_0 = Px$ – его проекция на замкнутый выпуклый конус K. Тогда $x = x_0 + x_0^* = Px + x_0^*$, где $x_0^* = x - x_0 = x - Px \in K^*$ и $\langle x_0^*, x_0 \rangle = \langle x - x_0, x_0 \rangle = \langle x - Px, Px \rangle = 0$.*

Доказательство. Так как K конус, то, положив в (2) $x_1 = x_0, x_1 = y, \alpha = 1$, имеем $x_0 + \beta y \in K$ для $\forall \beta \geqslant 0$, $\forall y \in K$. Поэтому согласно (4) $||x - x_0|| \leqslant ||x - (x_0 + \beta y)||$. Отсюда, учитывая тождество (1), получаем

$$||x - x_0||^2 \leqslant ||x - x_0 - \beta y||^2 = ||x - x_0||^2 - 2\beta\langle x - x_0, y\rangle + \beta^2||y||^2$$

или $2\langle x - x_0, y\rangle \leqslant \beta||y||^2$ для $\forall y \in K$ и $\forall \beta \geqslant 0$. Полагая $\beta = 0$, получаем $\langle x - x_0, y\rangle \leqslant 0$ для $\forall y \in K$. Отсюда согласно (3) $x - x_0 \in K^*$.

Если в (2) положить $\alpha = 0$, $x_2 = x_0$, $\beta = (1 - \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, то $(1 - \theta)x_0 = x_0 - \theta x_0 \in K$. Поэтому согласно (4) $||x - x_0|| \leqslant ||x - x_0 + \theta x_0||$. Тогда, учитывая тождество (1), имеем

$$||x - x_0||^2 \leqslant ||x - x_0 + \theta x_0||^2 = ||x - x_0||^2 + 2\theta\langle x - x_0, x_0\rangle + \theta^2||x_0||^2$$

или $0 \leqslant 2\langle x - x_0, x_0\rangle + \theta||x_0||$. Полагая $\theta = 0$, получаем $\langle x - x_0, x_0\rangle \geqslant 0$. Но, так как $x_0 \in K, x - x_0 \in K^*$, то согласно (3) $\langle x - x_0, x_0\rangle \leqslant 0$. Следовательно, $\langle x - x_0, x_0\rangle = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если K_1, K_2 – замкнутые выпуклые конусы, а P_1, P_2 – соответствующие им проекторы, то следующие условия эквивалентны:*

i) $K_1 \subseteq K_2$;

ii) $\langle P_1 x, x\rangle \leqslant \langle P_2 x, x\rangle$ *для* $\forall x \in H$;

iii) $||P_1 x||^2 \leqslant ||P_2 x||^2$ *для* $\forall x \in H$.

Доказательство. По теореме 1 для элемента $x \in H$ имеем, разложение $x = Px + x_0^*$, где $\langle Px, x_0^*\rangle = 0$. Поэтому

$$\langle P_K x, x\rangle = \langle P_K x, P_K x + x_0^*\rangle = \langle P_K x, P_K x\rangle + \langle P_K x, x_0^*\rangle = \langle P_K x, P_K x\rangle. \qquad (5)$$

Из тождества (1), $||P_K x||^2 = \langle P_K x, P_K x\rangle$ и равенства (5) получаем:

$$||x - P_K x||^2 = ||x||^2 - 2\langle P_K x, P_K x\rangle + ||P_K x||^2 = ||x||^2 - \langle P_K x, x\rangle. \quad (6)$$

Если $K_1 \subseteq K_2$, то $\inf\limits_{y \in K_1} ||x - y|| \geqslant \inf\limits_{y \in K_2} ||x - y||$ или $||x - P_1 x||^2 \geqslant ||x - P_2 x||^2$. Отсюда и из равенства (6) следует $||x||^2 - \langle P_1 x, x\rangle \geqslant ||x||^2 - \langle P_2 x, x\rangle$ или $\langle P_1 x, x\rangle \leqslant \langle P_2 x, x\rangle$, т.е. i<=>ii.

Если $\langle P_1 x, x\rangle \leqslant \langle P_2 x, x\rangle$, то $||x||^2 - \langle P_1 x, x\rangle \geqslant ||x||^2 - \langle P_2 x, x\rangle||$. Отсюда и равенства (6), получаем $||x - P_1 x|| \geqslant ||x - P_2 x||$. Пусть $x \in K_1$, тогда элемент x уже имеет наименьшее уклонение от самого себя и тогда $P_1 x = x$. Так как $0 = ||x - P_1 x|| \geqslant ||x - P_2 x|| \geqslant 0$, то $||x - P_2 x|| = 0$. Значит, $P_2 x = x$, а отсюда $x \in K_2$, т.е. $K_1 \subseteq K_2$. Следовательно, ii<=>i.

Из (5) и $||P_1 x||^2 = \langle P_1 x, P_1 x\rangle, ||P_2 x||^2 = \langle P_2 x, P_2 x\rangle$ следует ii<=>iii.

Пусть $\mathcal{A}[H]$ – множество всех замкнутых выпуклых конусов, гильбертова пространства H. Оно частично упорядоченно, если отношение порядка $K_1 \leqslant K_2$ – теоретико-множественное включение конусов $K_1 \subseteq K_2$. Определим для конусов $K_1, K_2 \in \mathcal{A}[H]$ логические операции $\vee$ и $\wedge$ следующим образом: $K_1 \vee K_2$ – наименьший замкнутый выпуклый конус, содержащий конусы K_1 и K_2; $K_1 \wedge K_2$ – теоретико-множественное пересечение конусов, т.е. $K_1 \wedge K_2 = K_1 \cap K_2$.

ТЕОРЕМА 3. *Множество $\mathcal{A}[H]$ относительно операции ортодополнения $K \to K^*$ – орторешетка, т.е. верны следующие тождества: a) $K \vee K^* = H$; b) $K \wedge K^* = O$; c) $K^{**} = K$; d) $(K_1 \vee K_2)^* = K_1^* \wedge K_2^*$, e) $(K_1 \wedge K_2)^* = K_1^* \vee K_2^*$.*

Доказательство. Несложно показать, что множество $\mathcal{A}[H]$ – решетка, а операции решетки sup и inf совпадают соответственно на множестве $\mathcal{A}[H]$ с логическими операциями $\vee$ и $\wedge$.

Тождество a) следует из теоремы 1. Если $x \in K \wedge K^*$, то согласно (3) $||x||^2 = \langle x, x\rangle \leqslant 0$, и поэтому $x = O$. Отсюда следует тождество b). Доказательства тождеств c), d) и e) см. в [3].

Сопоставив каждому конусу $K \in \mathcal{A}[H]$ проектор P_K на него, получим множество проекторов, которое обозначим $\mathcal{P}[H]$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть на $\mathcal{P}[H]$ заданы: отношение порядка $P_1 \leqslant P_2$ соотношением $\langle P_1 x, x\rangle \leqslant \langle P_2 x, x\rangle$ для $\forall x \in H$ и операция ортодополнения $P \to P^*$ как проектирование на сопряженный конус.*

Тогда $\mathcal{P}[H]$ – орторешетка с логическими операциями $P_1 \vee P_2 = \sup\{P_1, P_2\}$, $P_1 \wedge P_2 = \inf\{P_1, P_2\}$ и верны тождества: a) $P \vee P^* = I$; b) $P \wedge P^* = O$; c) $P^{**} = P$; d) $(P_1 \vee P_2)^* = P_1^* \wedge P_2^*$; e) $(P_1 \wedge P_2)^* = P_1^* \vee P_2^*$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\mathcal{P}[H]$ относительно отношения порядка $P_1 \leqslant P_2$ – частично упорядоченное множество.

Пусть конусы $L, M \in \mathcal{A}[H]$, а $P_L, P_M \in \mathcal{P}[H]$ – соответствующие им проекторы и $L \vee M = \sup\{L, M\}$. Так как $L \leqslant L \vee M$ и $M \leqslant L \vee M$, то согласно теореме 2 $\langle P_L x, x\rangle \leqslant \langle P_{L\vee M} x, x\rangle, \langle P_M x, x\rangle \leqslant \langle P_{L\vee M} x, x\rangle$ для $\forall x \in H$. Следовательно, $P_L \leqslant P_{L\vee M}, P_M \leq P_{L\vee M}$, и проектор $P_{L\vee M}$ будет мажорантой для проекторов P_L, P_M.

Пусть проектор Q – другая мажоранта проекторов P_L, P_M, т.е. $P_L \leqslant Q, P_M \leqslant Q$, где $\langle P_L x, x\rangle \leqslant \langle Qx, x\rangle, \langle P_M x, x\rangle \leqslant \langle Qx, x\rangle$ для $\forall x \in H$. Определим конус $N = Q(H)$. По теореме 2 $L \leqslant N, M \leqslant N$. Отсюда конус N – мажоранта конусов L, M и $L \vee M = \sup\{L, M\} \leqslant N$. Тогда по теореме 2 имеем $\langle P_{L\vee M} x, x\rangle \leqslant \langle Qx, x\rangle$. Следовательно, для любой мажоранты Q проекторов P_L, P_M выполняется $P_{L\vee M} \leqslant Q$. Поэтому из определения верхней грани следует, что $P_{L\vee M} = \sup\{P_L, P_M\} = P_L \vee P_M$. Аналогично доказывается, что верно $P_{L\wedge M} = \inf\{P_L, P_M\} = P_L \wedge P_M$. Следовательно, имеем соотношения

$$P_L \vee P_M = P_{L\vee M}, \quad P_L \wedge P_M = P_{L\wedge M}. \tag{7}$$

Зададим конусы $K = P(H)$, $K^* = P^*(H)$. Тогда согласно (7) $P \vee P^* = P_{K\vee K^*} = P_H = I$, $P \wedge P^* = P_{K\wedge K^*} = P_O = O$, т.е. верны тождества a), b).

Из определения ортодополнения имеем $(P_K)^* = P_{K^*}$, а из теоремы 3 имеем $K^{**} = K^*$. Тогда $(P_K)^{**} = ((P_K)^*)^* = (P_{K^*})^* = P_{K^{**}} = P_K$, т.е. верно тождество c).

Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[H]$. Определим конусы $L = P_1(H), M = P_2(H)$. Тогда, из соотношения (7), теоремы 3 и определения ортодополнения $P_{K^*} = (P_K)^*$, следует верность тождеств d) и e):

$$P_1^* \vee P_2^* = P_{L^*\vee M^*} = P_{(L\wedge M)^*} = (P_{L\wedge M})^* = (P_L \wedge P_M)^* = (P_1 \wedge P_2)^*,$$

$$P_1^* \wedge P_2^* = P_{L^*\wedge M^*} = P_{(L\vee M)^*} = (P_{L\vee M})^* = (P_L \vee P_M)^* = (P_1 \vee P_2)^*.$$

Замечание 1. Решетка замкнутых подпространств гильбертова пространства H ортомодулярна: $K_1 \leqslant K_2 \to K_1 \vee (K_1^{\perp} \wedge K_2) = K_2$ [2], [7].

При $n \geqslant 2$ решетка $\mathcal{A}[H]$ неортомодулярна. Действительно, зададим векторы $a = (1,0)$, $b = (0,1)$, $c = (1,1)$, ортант $K_2 = \{x = \lambda a + \beta b,\ \lambda \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0\}$ и его биссектрису $K_1 = \{x = \lambda c, \lambda \geqslant 0\}$. Ясно, что $K_1 \leqslant K_2$, а ортант K_2 принадлежит полуплоскости $\langle x,c\rangle \geqslant 0$. Согласно (3) $K_1^* = \{\langle x,c\rangle \leqslant 0\}$, т.е. K_1^* – полуплоскость $\langle x,c\rangle \leqslant 0$. Значит, K_1^*, K_2 лежат в разных полуплоскостях, и только точка O у них общая. Тогда $K_1 \vee (K_1^* \wedge K_2) = K_1 \vee O = K_1 \neq K_2$, т.е. решетка решетка $\mathcal{A}[H]$ неортомодулярна. Отсюда следует, что орторешетка $\mathcal{P}[H]$ тоже неортомодулярна.

Замечание 2. Теорема 3 доказана в [5] для выпуклых многогранников в конечномерном пространстве. В этом случае $K_1 \vee K_2 = K_1 + K_2 = \overline{\{x_1 + x_2, x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\}}$. Для замкнутых выпуклых конусов $K_1 \vee K_2 = \overline{K_1 + K_2}$, и черту замыкания убрать нельзя. Ее нельзя убрать также, когда $K_1, K_2 \subseteq H$ замкнутые подпространства, а H бесконечномерно [7]. Однако по теореме 1 всегда $K \vee K^* = K + K^*$.

Литература

1. G. Birkhoff, J. v. Neumann, The logic of quantum mechanics, *Ann. of Math.*, **37**, 823 (1936).
2. Г. Биркгоф, *Теория решеток*, ИЛ, Москва (1984).
3. Б.Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, Москва (1980).
4. Ж. Сеа, *Оптимизация. Теория и алгоритмы*, Мир, Москва (1973).
5. А.Д. Голдман, А.Щ. Туцкер, Многогранные выпуклые конусы, *Линейные неравенства и смежные вопросы*, ИЛ, Москва, 142–161 (1959).
6. Г. Мельниченко, Алгебра инструментов и ее применение в распознавании сигналов, *Статистические проблемы управления*, **80**, 48–4 (1987).
7. N.D. Megill, M. Pavičić, Orthomodular Lattices and a Quantum Algebra, *Int. J. Theor. Phys.*, **40**, 1387–410 (2001).

SUMMARY

G. Melničenko. Kūgiai ir projektoriai į juos kaip neortomoduliarinių logikų pavyzdžiai

Darbe parodyta, kad kūgiai ir projektoriai į juos yra neortomoduliarinės logikos Hilberto erdvėje. Šios logikos turi savyje poerdvių ir projektorių į jas kvantines ortomoduliarines logikas, kurias pirmieji nagrinėjo G. Birkhoffas, J. v. Neumannas.