Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 779–783

Mechaninių virpesių slopinimas dalimis tiesinėje sistemoje

Genovaitė ZAKSIENĖ (KTU)
el. paštas: genovaite.zaksiene@ktu.lt

Technologinių procesų sparta, sudėtingos aparatūros taikymas padidina nepageidaujamų mechaninių poveikių įtaką mechanizmams. Vienas iš būdų kovoti su žalingais virpesiais yra dinaminių slopintuvų taikymas mechaninėms sistemoms, kai nekeičiama sistemos konstrukcija ir žadinimo šaltinio panaikinti negalima. Nagrinėjama netiesinė sistema, kurios tamprumo jėga yra dalimis tiesinė. Tokių sistemų analiziniai tyrimo metodai yra nuoseklaus sujungimo, harmoninės linearizacijos ir kiti.

Taikant dinaminius slopintuvus netiesinėms sistemoms labai svarbu nustatyti sistemos parametrų reikšmes, su kuriomis toks slopintuvas veikia efektyviausiai. Jei pagrindinę masę m veikianti jėga iššaukia pavojingai dideles virpesių amplitudes, tai prijungus dinaminį slopintuvą, t.y., papildomą masę m, ir parinkus tamprumo parametrą c_1, galima žymiai sumažinti amplitudę.

Tarkime, kad dinaminis modelis yra aprašomas diferencialinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + f(x) - c_1(x_1 - x) = A\sin\omega t, \\ m_1\ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

čia x, x_1 – koordinatės atskaitomos nuo sistemos statinės pusiausvyros padėties, m_1, c_1 – tiesinio dinaminio slopintuvo parametrai, m – pagrindinė sistemos masė, $f(x)$ – standumo charakteristika, kuri yra dalimis tiesinė ir nusakoma lygtimi

$$f(x) = \begin{cases} cx, & |x| \leqslant x_y, \\ (c + c_0)x - c_0 x_y \operatorname{sgn} x, & x_y < |x| \leqslant x_z, \\ (c + c_0 + c_2)x - c_0 x_y \operatorname{sgn} x - c_2 x_z \operatorname{sgn} x, & |x| > x_z, \end{cases} \tag{2}$$

čia x_y, x_z – sistemos judesio apribojimai; c, c_0, c_1, c_2 – teigiami standumo charakteristikų parametrai.

Sistemai spręsti taikomas harmoninės linearizacijos metodas. Netiesinė standumo charakteristika ištiesinama, panaudojant lygtį

$$f(x) = qx. \tag{3}$$

Tuomet (1) sistemos sprendiniai arti rezonanso bus:

$$\begin{aligned} x &= \beta \sin\omega t, \\ x_1 &= \beta_1 \sin\omega t. \end{aligned} \tag{4}$$

Ištiesintos standumo charakteristikos koeficientas q apskaičiuojamas taip:

$$q(\beta)=\frac{4}{\pi\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\beta\sin\tau)\sin\tau\,\mathrm{d}\tau,$$

čia $\tau=\omega t$.

Gauname:

$$q(\beta)=\frac{4}{\pi\beta}\left(\int_0^{t_1} c\beta(\sin\tau)^2\,\mathrm{d}\tau+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\big((c+c_0)\beta\sin\tau-x_yc_0\big)\sin\tau\,\mathrm{d}\tau\right)$$
$$+\frac{4}{\pi\beta}\left(\int_{\tau_2}^{\frac{\pi}{2}}\big((c+c_0+c_2)\beta\sin\tau-x_zc_2-x_yc_0\big)\sin\tau\,\mathrm{d}\tau\right)$$
$$=(c+c_0+c_2)+\frac{6c_0x_y}{\pi\beta}\sqrt{1-\left(\frac{x_y}{\beta}\right)^2}+\frac{2c_0}{\pi}\arcsin\frac{x_y}{\beta}-\frac{2c_2x_z}{\pi\beta}\sqrt{1-\left(\frac{x_z}{\beta}\right)^2}$$
$$-\frac{2c_2}{\pi}\arcsin\frac{x_z}{\beta}-\frac{8x_yc_0}{\pi\beta}\sqrt{1-\left(\frac{x_z}{\beta}\right)^2}, \tag{5}$$

čia $\tau_1=\arcsin\frac{x_y}{\beta}$, $\tau_2=\arcsin\frac{x_z}{\beta}$.

Įrašę į (1) sistemą sprendinio (4) išraiškas ir ištiesintą standumo charakteristiką, lygčių sistemą pertvarkome į sistemą

$$\begin{cases}-m\omega^2\beta+q\beta-c_1(\beta_1-\beta)=A,\\ -m_1\omega^2\beta_1+c_1(\beta_1-\beta)=0.\end{cases} \tag{6}$$

Dinaminio slopintuvo amplitudę randame iš (6) sistemos antrosios lygties:

$$\beta_1=\frac{c_1\beta}{c_1-m_1\omega^2}=\frac{\omega_1^2\beta}{\omega_1^2-\omega^2}.$$

Pagrindinės masės amplitudė β, įrašius β_1 išraišką į (6) sistemos pirmą lygtį, bus tokia:

$$\frac{\beta c_1}{A}=\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\left(-\frac{1}{\mu}+\frac{q}{c_1}\frac{\omega^2}{\omega_1^2}-\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}\right)}, \tag{7}$$

čia $\mu=\frac{m_1}{m}$, $\omega_1^2=\frac{c_1}{m_1}$.

Pertvarkius (7) lygtį, gaunama amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminiu slopintuvu:

$$\frac{\beta c_1}{A}=\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2\left(-\frac{1}{\mu}(1-\gamma^2)+\frac{q}{c_1}\frac{1}{\gamma^2}(1-\gamma^2)-1\right)}, \tag{8}$$

čia $\gamma = \frac{\omega}{\omega_1}$.

Iš (8) lygties išplaukia, kad $\beta \to 0$, kai $\gamma \to 1$.

Atitinkamai parinkus dinaminio slopintuvo parametrus, kai $\frac{c_1}{m_1} = \omega_1^2 \to \omega^2$, pagrindiniai virpesiai sistemoje nuslopinami. Bedimensėse koordinatėse amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminiu slopintuvu bus tokia:

$$\alpha\gamma^2\Big(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1}\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2}\Big) - \frac{A}{c_1 x_y} = 0, \tag{9}$$

čia

$$q(\alpha) = (c + c_0 + c_2) + \frac{6c_0}{\pi\alpha}\sqrt{1 - \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^2} + \frac{2c_0}{\pi}\arcsin\frac{1}{\alpha}$$
$$- \frac{2c_2 x_z}{\pi x_y \alpha}\sqrt{1 - \Big(\frac{x_z}{x_y\alpha}\Big)^2} - \frac{2c_2}{\pi}\arcsin\frac{x_z}{x_y\alpha} - \frac{8c_0}{\pi\alpha}\sqrt{1 - \Big(\frac{x_z}{x_y\alpha}\Big)^2}, \quad \alpha = \frac{\beta}{x_y}.$$

Bedimensėse koordinatėse amplitudinė dažninė charakteristika be dinaminio slopintuvo gaunama iš lygties

$$m\ddot{x} + qx = A\sin\omega t,$$

įrašius į ją $x = \beta\sin\omega t$

$$-m\omega^2\beta + q\beta = A,$$
$$\frac{\beta}{x_y}\Big(\frac{q}{c} - \gamma_1^2\Big) = \frac{A}{cx_y}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{\omega_2}, \quad \omega_2^2 = \frac{c}{m}.$$

Standumo charakteristika be dinaminio slopintuvo bedimensėse koordinatėse atrodys taip:

$$\alpha\Big(\frac{q}{c} - \gamma_1^2\Big) = \frac{A}{x_y c}.$$

Perėjus prie ribos, kai $\alpha \to \infty$, iš amplitudinės dažninės charakteristikos

$$\alpha = \frac{A}{x_y c} : \Bigg(-\frac{\gamma^2}{\mu} + \frac{(c + c_0 + c_2)}{c_1} + \frac{6c_0}{\pi c_1\alpha}\sqrt{1 - \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^2} + \frac{2c_0}{c_1\pi}\arcsin\frac{1}{\alpha}$$
$$- \frac{2c_2 x_z}{\pi c_1 x_y\alpha}\sqrt{1 - \Big(\frac{x_z}{x_y\alpha}\Big)^2} - \frac{2c_2}{c_1\pi}\arcsin\frac{x_z}{x_y\alpha} - \frac{8c_0}{\pi c_1\alpha}\sqrt{1 - \Big(\frac{x_z}{x_y\alpha}\Big)^2} - \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\Bigg),$$

gaunama lygtis rezonansiniams dažniams nustatyti:

$$-\frac{\gamma^2}{\mu} + \frac{c + c_0 + c_2}{c_1} - \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} = 0, \tag{10}$$
$$\gamma^4 - \gamma^2\Big(1 + \mu\Big(\frac{c + c_0 + c_2}{c_1} + 1\Big)\Big) + \frac{c + c_0 + c_2}{c_1}\mu = 0.$$

Iš (10) lygties išplaukia, kad sistema turės rezonansinius virpesius, kai

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1+\mu\left(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\right) \pm \sqrt{\left(1+\mu\left(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\right)\right)^2 - \frac{4\mu(c+c_0+c_2)}{c_1}}}{2}.$$

Sąlyga, kad diskriminantas būtų neneigiamas tikrai išpildyta, nes

$$\left(1+\mu\left(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\right)\right)^2 - \frac{4\mu(c+c_0+c_2)}{c_1}$$
$$= \left(1-\mu\left(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\right)\right)^2 + 4\mu \geqslant 0, \quad \mu = \frac{m_1}{m} > 0.$$

Atstumas tarp rezonansų Δ lygus:

$$\Delta = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \sqrt{\left(1-\mu\left(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\right)\right)^2 + 4\mu}.$$

Ieškosim funkcijos $\Delta(\mu)$ ekstremumo:

$$\Delta'(u) = \frac{\mu\left(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\right)^2 + 1 - \frac{c+c_0+c_2}{c_1}}{\sqrt{1-\mu\left(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\right)^2 + 4\mu}}.$$

Mažiausias dažnio diapazonas bus, kai $\mu = \frac{c_1(c+c_0+c_2-c_1)}{(c+c_0+c_2+c_1)^2}$.
Tuomet gauname, kad dinaminio slopintuvo parametrai turi tenkinti sąlygą

$$\frac{c_1}{m_1} = \frac{(c+c_0+c_2+c_1)^2}{m(c+c_0+c_2-c_1)} \to \omega^2,$$

o minimali dinaminio slopintuvo dažnio veikimo juosta bus lygi:

$$\min\Delta = \frac{2\sqrt{c_1(c+c_0+c_2)}}{c+c_0+c_2+c_1}.$$

Žinoma [1], kad tiesiniu atveju dinaminio slopintuvo dažnio veikimo juosta lygi $\Delta = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \sqrt{\mu^2+4\mu}$. Netiesinėse sistemose dažnio veikimo juosta bus platesnė negu tiesinėse sistemose, kai

$$\left(1-\mu\left(\frac{c+c_0+c_2}{c_1}+1\right)\right)^2 > \mu^2.$$

Išsprendus nelygybę gaunama sritis, kurioje dinaminis slopintuvas yra efektyvesnis negu tiesiniu atveju. Ši sritis apibūdinama sąlygomis:

$$\mu > \frac{c_1}{c+c_0+c_2} \quad \text{arba} \quad 0 < \mu < \frac{c_1}{c+c_0+c_2+2c_1}.$$

Srityje, kai $\frac{c_1}{c+c_0+c_2+2c_1} < \mu < \frac{c_1}{c+c_0+c_2}$, dinaminio slopintuvo veikimo dažnio juosta jau yra siauresnė negu tiesinėse sistemose.

Išvados

1. Tiriant dalimis tiesinę sistemą nustatyta, kad ne visuomet netiesinėse sistemose dinaminio slopintuvo veikimo dažnio zona yra platesnė negu tiesinėse sistemose.
2. Surastos netiesinės sistemos parametrų kitimo sritys, kuriose dinaminis slopintuvas yra efektyvesnis negu tiesinėse sistemose.
3. Dinaminio slopintuvo dažnis visais atvejais turi būti artimas žadinimo dažniui.

Literatūra

1. P. Žiliukas, *Mechaniniai virpesiai*, Technologija, Kaunas (1993).
2. D.W. Jordan, P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University press (2003).

SUMMARY

G. Zaksienė. The decay of mechanical oscillations in piecewise linear system

The application of the dynamical dampers in the mechanical systems, when the sources of stimulation are impossible to abolish, is one of the ways to fight against the harmful vibrations. The linear dynamical damper of nonlinear systems can compensate the force of stimulation in wide diapason of frequency. The parameters of dynamical system where dynamical damper exists more effectively are determined.

Keywords: nonlinear systems, dynamical dampers.