Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 29–31

Apie mišraus tipo parabolines formas

Edmundas GAIGALAS
el. paštas: edmundas.gaigalas@maf.vu.lt

M. Eichleris [1] įrodė, kad visos pirminio laipsnio pagrindinio tipo parabolinės formos užrašomos apibendrintų keturnarių teta eilučių tiesinėmis kombinacijomis. Bendruoju atveju nėra įrodyta, kad ir mišraus tipo parabolinių formų erdvėje egzistuoja apibendrintų keturnarių teta eilučių bazė. Kai kurie atskiri atvejai buvo išnagrinėti G. Lomadzės [2]. Šiame pranešime nagrinėjamas parabolinių formų erdvės $(-10, 17, \chi)$ atvejis. Žinoma, kad šios erdvės dimensija lygi 12. Surasime visas 12 bazinių apibendrintųjų keturmačių teta eilučių.

Žinoma [3], kad kvadratinė forma

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4$$

yra tipo $(-2, 17, \chi)$.

Tarkime, $P_8(x) = P_8(x_1, x_2, x_3, x_4)$ yra kvadratinės formos $Q(x)$ 8-tosios eilės sferinė funkcija. Iš [4] išplaukia, kad šią funkciją atitinkanti keturnarė teta eilutė

$$\Theta(\tau, P_8(x), Q(x)) = \sum_{x_1, x_2, x_3, x_4 = -\infty}^{\infty} P_8(x) \exp\{2\pi i \tau Q(x)\}$$

yra tipo $(-10, 17, \chi)$ parabolinė forma. Atitinkamus sferinius polinomus parinksime iš tokių tarpo:

$$\varphi_{\underbrace{r\ldots r}_{8\,\text{kartus}}} = x_r^8 - \frac{7Q(x)}{2\cdot 17} A_{rr} x_r^6 + \frac{15Q^2(x)}{4\cdot 17^2} A_{rr}^2 x_r^4 - \frac{5Q^3(x)}{4\cdot 17^3} A_{rr}^3 x_r^3 + \frac{Q^4(x)}{16\cdot 17^4} A_{rr}^4, \quad (r = \overline{1,4})$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\underbrace{r\ldots r}_{7\,\text{kartus}}\, s} = {} & x_r^7 x_s - \frac{7Q(x)}{8\cdot 17}\big(3A_{rr}^3 x_r^5 x_s + A_{rs} x_r^6\big) + \frac{18Q^2(x)}{8\cdot 17^2}\big(A_{rr}^2 x_r^3 x_s + A_{rr} A_{rs} x_r^4\big) \\ & - \frac{5Q^3(x)}{16\cdot 17^3}\big(A_{rr}^3 x_r x_s + 3A_{rr}^2 A_{rs} x_r^2\big) + \frac{Q^4(x)}{16\cdot 17^4} A_{rr}^3 A_{rs}, \quad (r, s = \overline{1,4}). \end{aligned}$$

Čia A_{ij} yra kvadratinės formos $Q(x)$ matricos nario a_{ij} algebrinis papildinys.

Pasirenkame šiuos polinomus:

$$\varphi_{\underbrace{1\ldots 1}_{8\,\text{kartus}}}, \quad \varphi_{\underbrace{2\ldots 2}_{8\,\text{kartus}}}, \quad \varphi_{\underbrace{3\ldots 3}_{8\,\text{kartus}}}, \quad \varphi_{\underbrace{4\ldots 4}_{8\,\text{kartus}}},$$

$$\varphi\,\underbrace{1\ldots1}_{7\text{ kartus}}2,\quad \varphi\,\underbrace{1\ldots1}_{7\text{ kartus}}3,\quad \varphi\,\underbrace{1\ldots1}_{7\text{ kartus}}4,\quad \varphi\,\underbrace{2\ldots2}_{7\text{ kartus}}1,$$
$$\varphi\,\underbrace{2\ldots2}_{7\text{ kartus}}3,\quad \varphi\,\underbrace{3\ldots3}_{7\text{ kartus}}1,\quad \varphi\,\underbrace{3\ldots3}_{7\text{ kartus}}2,\quad \varphi\,\underbrace{3\ldots3}_{7\text{ kartus}}4.$$

Išsprendę lygtis $Q = n$ $(n = \overline{1, 12})$ sveikaisiais skaičiais, galime atitinkamose teta eilutėse išskirti pirmuosius 12 narių, kurių pakanka įrodymui, kad visos šios eilutės yra tiesiškai nepriklausomos ir sudaro parabolinių formų erdvės $(-10, 17, \chi)$ bazę:

$$\begin{aligned}
\Theta(\tau, \varphi_{1\ldots1}, Q) = {}& \frac{1}{83521}\big(123384z + 4417456z^2 + 21037450z^3 + 162002336z^4 \\
&+ 235197620z^5 + 890485820z^6 + 1699515174z^7 \\
&+ 5709257352z^8 + 3570463244z^9 + 21344821946z^{10} \\
&+ 17177174802z^{11} + 21344821946z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{2\ldots2}, Q) = {}& \frac{1}{83521}\big(69868z + 2275932z^2 + 12367824z^3 + 91108596z^4 \\
&+111083068z^5 + 521128996z^6 + 890485820z^7 \\
&+3534261100z^8 + 2140040540z^9 + 8470940840z^{10} \\
&+13159676900z^{11} + 15021381314z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{3\ldots3}, Q) = {}& \frac{1}{83521}\big(23632z + 1825998z^2 + 2448186z^3 + 41530198z^4 \\
&+ 104031396z^5 + 166624602z^6 + 352796430z^7 \\
&+ 1479438162z^8 + 1292125772z^9 + 7286359160z^{10} \\
&+ 12447824946z^{11} + 13064453258z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{4\ldots4}, Q) = {}& \frac{1}{83521}\big(648z + 209604z^2 + 876162z^3 + 6496020z^4 \\
&+ 4896372z^5 + 37103472z^6 + 63112350z^7 \\
&+ 166008540z^8 + 1442217548z^9 + 10991235800z^{10} \\
&+ 21498098354z^{11} + 22797648218z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{1\ldots1\,2}, Q) = {}& \frac{1}{668168}\big(412990z+2068352z^2+4014920z^3+56895280z^4 \\
&- 124450480z^5 - 7176156z^6 - 77949816z^7 \\
&+ 1584990528z^8 - 339232256z^9 - 665290080z^{10} \\
&- 2864407124z^{11} + 1708582040z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{1\ldots1\,3}, Q) = {}& \frac{1}{334084}\big(16212z + 185624z^2 - 4308596z^3 - 23479456z^4 \\
&+ 10743904z^5 - 101686512z^6 - 113279152z^7 \\
&- 876326064z^8 - 725757252z^9 - 990069512z^{10} \\
&- 1519311904z^{11} - 2589801512z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{1\ldots1\,4}, Q) = {}& \frac{1}{334084}\big(172200z+9151504z^2+52363456z^3+422066240z^4 \\
&+ 379104192z^5 + 2068332576z^6 + 4078550616z^7 \\
&+ 14423320928z^8 + 9645976056z^9 + 82128355024z^{10} \\
&+ 37375516904z^{11} + 50207885776z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{2\ldots2\,1}, Q) = {}& \frac{1}{668168}\big(671260z+14540888z^2+111002504z^3+95891419z^4 \\
&+ 1122546212z^5 + 4196763264z^6 + 8249731420z^7
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 30827339296z^8 + 17100272488z^9 + 57944156424z^{10} \\
&+ 81269625424z^{11} + 119160992576z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{2\ldots 2\,3}, Q) = {}& \frac{1}{668168}\big(- 3988z - 443704z^2 + 1843400z^3 + 11700936z^4 \\
&- 2901516z^5 - 18819576z^6 - 2397780z^7 \\
&+ 2165712z^8 - 117443544z^9 - 650822040z^{10} \\
&- 205385536z^{11} - 535009488z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{3\ldots 3\,1}, Q) = {}& \frac{1}{334084}\big(- 3582z + 236540z^2 + 1039318z^3 + 143736z^4 \\
&- 10768978z^5 - 4680776z^6 + 35941416z^7 \\
&+ 85611296z^8 + 125795340z^9 - 438357276z^{10} \\
&- 30559182z^{11} + 220012048z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{3\ldots 3\,2}, Q) = {}& \frac{1}{668168}\big(3582z - 236540z^2 - 1039318z^3 - 143736z^4 \\
&+ 10768978z^5 + 18730380z^6 - 35941416z^7 \\
&- 253547314z^8 - 125795340z^9 + 418357270z^{10} \\
&- 261190399z^{11} - 1290323616z^{12} + \ldots\big); \\
\Theta(\tau, \varphi_{3\ldots 3\,4}, Q) = {}& \frac{1}{668168}\big(10746z - 709620z^2 - 3117954z^3 - 431208z^4 \\
&+ 32306934z^5 + 56191140z^6 - 107824248z^7 \\
&- 256833888z^8 - 377386020z^9 + 1315071828z^{10} \\
&+ 235925266z^{11} - 1407976288z^{12} + \ldots\big);
\end{aligned}
$$

čia $z = \exp\{2\pi i\tau\}$.

References

[1] M. Eichler, Quadratische Formen und Modulfunktionen *Acta Arithmetica*, **4**(3), 217–239 1958.

[2] Г. А. Ломадзе, О параболических формах простой ступени и смешанного типа, *Труды Тбилисского математического института*, **63**, 36–53 (1980).

[3] K. Germann, Tabellen reduzierter, positiver quaternärer quadratisher Formen, *Studien zur Theorie der quadratischen Formen*, Basel und Stuttgart, 128–155, (1968).

[4] E. Hecke, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, in: *Mathematische Werke*, Göttingen (1970), pp. 789–918.

On the cusp forms of mixed type

E. Gaigalas

The base of the space of cusp forms of type $(-10, 17, \chi)$ is constructed in the form of the generalized quaternary theta series.