Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 99–103

Большие уклонения многомерных считающих процессов

Вайдотас КАНИШАУСКАС (ŠU)
e-mail: mat.kat@fm.su.lt

В работе изучается вид функционала действия для мер $\mu_{t,\gamma}(B) = P\left(t^{-\frac{1}{\gamma}} N_t(x_1,\ldots,x_d) \in B\right)$, $B \in \mathcal{B}(R_+)$, $t > 0$, $x_i > 0$, $\gamma > 0$ построенных по многомерному считающему процессу

$$N_t(x_1,\ldots,x_d) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n^1 \leqslant x_1 t,\ldots,T_n^d \leqslant x_d t),$$

где $(T_n^1,\ldots,T_n^d)$ – случайный вектор с независимыми компонентами, удовлетворяющими асимптотическое усложненное условие Крамера. Аналогичный резултат для одномерных считающих процессов получен автором в работе [1].

Пусть на стохастичеком базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ задан многомерный считающий процесс

$$N_t(x_1,\ldots,x_d) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n^1 \leqslant x_1 t,\ldots,T_n^d \leqslant x_d t), \qquad t > 0,\ x_i \geqslant 0,$$

где $T_n = (T_n^1,\ldots,T_n^d)$ – последовательность случайных векторов с независимыми и неубывающими компонентами, а $1(A)$ – индикатор мнозхества A.

Введем условие:

A. Существуют такие положительные постоянные числа $\beta_1,\ldots,\beta_d$, $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \ldots \neq \beta_d$ и дифференцируемые функции $\psi^i_{\beta_i}(\lambda)$, $\lambda \in R = (-\infty,+\infty)$, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{E} \exp\left\{\lambda n^{1-\beta_i} T_n^i\right\} = \psi^i_{\beta_i}(\lambda) < \infty, \qquad i = 1,\ldots,d,$$

где $\mathbb{E}$ – математическое ожидание.

Лемма 1 ([2], [4]). *Пусть выполнено условие A. Тогда для мер $P_n^i(B) = P\left(n^{-\beta_i} T_n^i \in B\right)$, $B \in \mathcal{B}(R)$, $n \in N$, $i = 1,\ldots,d$, справедлив принцип больших уклонений (см. [3]) с функционалом действия вида $I_i(x) = \sup\limits_{\lambda}(\lambda x - \psi^i_{\beta_i}(\lambda))$,*

$x \in R$, и
1) $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\beta_i}T_n^i = a_i = (\psi^i_{\beta_i}(x))'|_{x=0}\right) = 1;$
2) для $\alpha < a_i$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(n^{-\beta_i}T_n^i < \alpha) = -I_i(\alpha);$$

и для $\alpha > a_i$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(n^{-\beta_i}T_n^i > \alpha) = -I_i(\alpha);$$

3)Функция $I_i(x)$, $x \geqslant 0$ *имеет такие свойства:*
$I_i(x) \geqslant 0$ *для каждого* $x \in R$,
$I_i(x_1) \leqslant I_i(x_2)$ *при* $a_i \leqslant x_1 < x_2$,
$I_i(x_1) \geqslant I_i(x_2)$ *при* $x_1 < x_2 < a_i$,
$I_i(a_i) = 0$.

Из этой леммы следует такой резултат.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* A *и* $n = t^{\frac{1}{\beta_i}}x(1+o(1))$, $t \to \infty$. *Тогда*
1) для $\alpha x^{-\beta_i} < a_i$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta_i}}\ln P(T^i_{[xt^{\frac{1}{\beta_i}}]} < t\alpha) = -J^i_\alpha(x);$$

2) для $\alpha x^{-\beta_i} > a_i$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta_i}}\ln P(T^i_{[xt^{\frac{1}{\beta_i}}]} > t\alpha) = -J^i_\alpha(x);$$

3) $\lim\limits_{t\to\infty} P(T^i_{[ct^{\frac{1}{\gamma}}]} < t\alpha) = 1$ *при* $\gamma > \beta_i$, $c > 0$, $\alpha > 0$;
4) $J^i_{x_i}(b) \leqslant J^i_{x_i}(a)$ *при* $a_i < \frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}}$,

$J^i_{x_i}(b) \geqslant J^i_{x_i}(a)$ *при* $\frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}} < a_i$,
5) $\inf\limits_{x\in[a,b]} J^i_{x_i}(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} J^i_{x_i}(x) = \begin{cases} J^i_{x_i}(a), \text{ при } & \frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}} < a_i, \\ J^i_{x_i}(b), \text{ при } & a_i < \frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}}, \end{cases}$
где $J^i_\alpha(x) = xI_i(\alpha x^{-\beta_i})$, $I_i(x) = \sup\limits_\lambda(\lambda x - \psi^i_{\beta_i}(\lambda))$, $x \geqslant 0$, $[a]$ *– целая часть числа* a.

Доказательство. Все формулы следует из лемы 1. Покажем, как доказывается 3).

Пусть $\gamma < \beta_i$. Положим $\gamma = \beta_i + \Delta$, $\Delta > 0$ и $n = ct^{\frac{1}{\gamma}}$. Тогда $n^\gamma = c^\gamma t$, $t = n^\gamma c^{-\gamma} = n^{\beta_i}c^{-\gamma}n^\Delta$, и

$$F^i_{ct^{\frac{1}{\gamma}}}(t\alpha) = P(T^i_{[ct^{\frac{1}{\gamma}}]} < t\alpha) = P(T^i_{[n]} < n^{\beta_i}c^{-\gamma}n^\Delta\alpha) =$$

$$P(n^{-\beta_i T^i_{[n]}} < \alpha c^{-\gamma} n^{\Delta}) = 1 - \mathrm{o}(1), \quad \text{при } n \to \infty (t \to \infty),$$

в силу $c > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ и утверждения 1) леммы 1.

Сформулируем главный резултат работы.

Теорема. *Пусть выполнено условие А. Тогда для мер* $\mu_{t,\gamma}(B) = P\left(t^{-\frac{1}{\gamma}} N_t(x_1, \dots, x_d) \in B\right)$, $B \in \mathcal{B}(R_+)$, $t > 0$, $x_i > 0$ *справедлив принцип больших уклонений с функционалом действия вида*

$$I_\gamma(x) = J^i_{x_i}(x), \quad \text{где } \gamma = \beta_i = \max_j \beta_j.$$

Доказательство. Используем формулы

$$\begin{aligned}
&P\left(N_t(x_1, \dots, x_d) = n\right) \\
&\quad = F^(_n x_1 t) \dots F^d_n(x_d t) - F^1_{n+1}(x_1 t) \dots F^d_{n+1}(x_d t), \\
&P\left(N_t(x_1, \dots, x_d) \in [n_1, n_2]\right) = \sum_{n \in [n_1, n_2]} P(N_t(x_1, \dots, x_d) = n) \\
&\quad = F^1_{[n_1]}(x_1 t) \dots F^d_{[n_1]}(x_d t) - F^1_{[n_2]+1}(x_1 t) \dots F^d_{[n_2]+1}(x_d t),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&P\left(N_t(x_1, \dots, x_d) \in [n_1, n_2]\right) \\
&\quad = F^1_{[n_1]}(x_1 t) \dots (1 - R^j_{[n_1]}(x_j t)) \dots F^d_{[n_1]}(x_d t) \\
&\qquad - F^1_{[n_2]+1}(x_1 t) \dots (1 - R^j_{[n_2]+1}(x_j t)) \dots F^d_{[n_2]+1}(x_d t) \\
&\quad = F^1_{[n_2]+1}(x_1 t) \dots R^j_{[n_2]+1}(x_j t) \dots F^d_{[n_2]+1}(x_d t) \\
&\qquad - F^1_{[n_1]}(x_1 t) \dots R^j_{[n_1]}(x_j t) \dots F^d_{[n_1]}(x_d t) \\
&\qquad + F^1_{[n_1]}(x_1 t) \dots F^{j-1}_{[n_1]}(x_{j-1} t) F^{j+1}_{[n_1]}(x_{j+1} t) \dots F^d_{[n_1]}(x_d t) \\
&\qquad - F^1_{[n_2]+1}(x_1 t) \dots F^{j-1}_{[n_2]+1}(x_{j-1} t) F^{j+1}_{[n_2]+1}(x_{j+1} t) \dots F^d_{[n_2]+1}(x_d t),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&P\left(N_t(x_1, \dots, x_d) \in (n_1, n_2)\right) \\
&\quad = F^1_{[n_1]+1}(x_1 t) \dots F^d_{[n_1]+1}(x_d t) - F^1_{[n_2-0]+1}(x_1 t) \dots F^d_{[n_2-0]+1}(x_d t),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&P\left(N_t(x_1, \dots, x_d) \in (n_1, n_2)\right) = F^1_{[n_2-0]+1}(x_1 t) \dots R^j_{[n_2-0]+1}(x_j t) \dots F^d_{[n_2-0]+1}(x_d t) \\
&\qquad - F^1_{[n_1]+1}(x_1 t) \dots R^j_{[n_1]+1}(x_j t) \dots F^d_{[n_1]+1}(x_d t) \\
&\qquad + F^1_{[n_1]+1}(x_1 t) \dots F^{j-1}_{[n_1]+1}(x_{j-1} t) F^{j+1}_{[n_1]+1}(x_{j+1} t) \dots F^d_{[n_1]+1}(x_d t) \\
&\qquad - F^1_{[n_2-0]+1}(x_1 t) \dots F^{j-1}_{[n_2-0]+1}(x_{j-1} t) F^{j+1}_{[n_2-0]+1}(x_{j+1} t) \dots F^d_{[n_2-0]+1}(x_d t),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $F^j_n(x_j t) = P(T^j_n \leqslant x_j t)$, $R^j_n(x_j t) = P(T^j_n > x_j t) = 1 - F^j_n(x_j t)$. Здесь $[n-0]$ имеет такой смысл: если $n \in \mathbb{N}$, то $[n-0] = n-1$; если $n \notin \mathbb{N}$, то $[n-0] = [n]$.

Выбираем произвольные числа $0 < a < b$. Тогда

$$\mu_{t,\gamma}[a,b] = P\left(N_t(x_1,\ldots,x_d) \in [at^{\frac{1}{\gamma}}, bt^{\frac{1}{\gamma}}]\right), \tag{5}$$

$$\mu_{t,\gamma}(a,b) = P\left(N_t(x_1,\ldots,x_d) \in (at^{\frac{1}{\gamma}}, bt^{\frac{1}{\gamma}})\right). \tag{6}$$

Пусть $\gamma = \beta_i = \max\limits_j \beta_j$ и $\frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}} < a_i$. Тогда $J^i_{x_i}(a) \leqslant J^i_{x_i}(b)$. Теперь для (5) и (6) в силу утверждений леммы 2 1) и 3) и формул (1) и (3) получаем

$$\mu_{t,\gamma}[a,b] = \mu_{t,\gamma}(a,b) = e^{-t^{\frac{1}{\gamma}} J^i_{x_i}(a)(1+\mathrm{o}(1))}(1+\mathrm{o}(1)). \tag{7}$$

Пусть $a_i < \frac{x_i}{b^{\beta_i}} < \frac{x_i}{a^{\beta_i}}$. Тогда $J^i_{x_i}(b) \leqslant J^i_{x_i}(a)$ и аналогично для (5) и (6) применяя формулы (2) и (4) в силу утверждений леммы 2 2) и 3) получаем

$$\mu_{t,\gamma}[a,b] = \mu_{t,\gamma}(a,b) = e^{-t^{\frac{1}{\gamma}} J^i_{x_i}(b)(1+\mathrm{o}(1))}(1+\mathrm{o}(1)). \tag{8}$$

Обединяя (7) и (8) в силу 5) из леммы 2 получаем

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\gamma}} \log \mu_{t,\gamma}[a,b] \leqslant -\inf_{x\in[a,b]} J^i_{x_i}(x), \tag{9}$$

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\gamma}} \log \mu_{t,\gamma}(a,b) \geqslant -\inf_{x\in(a,b)} J^i_{x_i}(x). \tag{10}$$

Как видим в (7) и (8) значимыми были крайные значения интервалов (a,b) и $[a,b]$. Значит формулы (9) и (10) будет иметь место для любых открытых G и замкнутых множеств F из R:

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\gamma}} \log \mu_{t,\gamma}(F) \leqslant -\inf_{x\in F} J^i_{x_i}(x),$$

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\gamma}} \log \mu_{t,\gamma}(G) \geqslant -\inf_{x\in G} J^i_{x_i}(x).$$

Поэтому $I_\gamma(x) = J^i_{x_i}(x)$, где $\gamma = \beta_i = \max \beta_j$, – функционал действия для семейства мер $\mu_{t,\gamma}(B)$ (см. определение (2.9) в [3]). Теорема доказана.

Следствие. Пусть $T^i_n = T^i_n(\gamma_i) = n^{-\gamma_i} \sum\limits_{j=1}^{n} X^j_i$, а $\{X^j_n, \quad n \geqslant 1\}$ – последовательность независимых и одинакого распределенных случайных величин удовлетворяющих условие Крамера: $\psi_j(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda X^j_1} < \infty$, при $\lambda > 0$ и $X_i \geqslant 0$. Тогда при $\beta_j = 1 - \gamma_j$, $j = 1, \ldots, d$ условие A имеет место и справедлив резултат теоремы.

Литература

[1] V. Kanišauskas, Large deviations for counting processes, *Liet. matem. rink.*, **40**(spec.numeris), 287–289 (2000).
[2] J.T. Cox, D. Griffeath, Large deviations for Poisson systems of independent random walks, *Z. Wahrsch. und Verw. Geb.*, **66**, 543–558 (1984).
[3] D.W. Stroock, *An Introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer, Berlin (1984).
[4] R.S. Ellis, *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*, Springer, Berlin (1985).

Daugiamačių skaičiuojančių procesų didieji nuokrypiai

V. Kanišauskas

Nagrinėjami daugiamačiai skaičiuojantys procesai. Šiuos procesus normuojame atitinkamu daugikliu. Gauti normuotus procesus atitinkančio tikimybinio mato didžiųjų nuokrypių greičio funkcijos pavidalai.