Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 134–141

О некоторых свойствах симметрического многочлена

Эдуард КИРЬЯЦКИЙ (VGTU)
e-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

В настоящей заметке рассматривается однородный симметрический многочлен вида

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) = \sum z_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot z_n^{j_n}$$

комплексных переменных $z_0, \ldots, z_n$, где $j_0 + \ldots + j_n = k, j_0 \geqslant 0, \ldots, j_n \geqslant 0$, и k – целое неотрицательное число.

Мы познакомимся со свойствами такого многочлена, часть из которых по нашему мнению могут представлять интерес и иметь приложения в различных вопросах анализа. В конце заметки в качестве приложения мы приведем без доказательства один результат, относящийся к симметрическим многочленам.

Пусть $F(z)$ – однозначная аналитическая в области D функция. Определим разделенную разность n-го порядка функции $F(z)$ в попарно различных точках $z_0, \ldots, z_n \in D$ следующей рекуррентной формулой:

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = \frac{[F(z); z_0, \ldots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \ldots, z_n]}{z_0 - z_n}, \quad [F(z); z_0] = F(z_0).$$

Разделенная разность функции $F(z)$ является аналитической по любому из своих аргументов. Это позволяет доопределить n-ую разделенную разность нашей функции $F(z)$ в том случае, когда среди точек $z_0, \ldots, z_n \in D$ есть совпадающие между собой точки. Например, если $z_0 = z_1 = \xi_0$, то полагаем

$$[F(z); \xi_0, \xi_0] = F'(\xi_0).$$

Вообще, если точки $\xi_0, \ldots, \xi_s \in D$ и попарно различны, то полагаем [1]

$$\Big[F(z); \underbrace{\xi_0, \ldots, \xi_0}_{p_0}, \ldots, \underbrace{\xi_s, \ldots, \xi_s}_{p_s}\Big] = \frac{1}{(p_0-1)! \ldots (p_s-1)!} \frac{\partial^{n-s} [F(z); \xi_0, \ldots, \xi_s]}{\partial \xi_0^{p_0-1} \ldots \partial \xi_s^{p_s-1}},$$

где $p_0 + \ldots + p_s = n + 1$. В частности, если $z_0 = \ldots = z_n = \xi$, то

$$\Big[F(z)\,;\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{n+1}\Big] = \frac{1}{n!}F^{(n)}(\xi)\,.$$

Таким образом, разделенная разность является в некотором смысле обобщением производной и обладает многими замечательными свойствами, часть из которых можно найти в [1], [2].

Сформулируем несколько простейших свойств симметрического однородного многочлена.

Свойство 1. *Пусть l и n – целые неотрицательные числа. Для функции $F(z) = z^l$, где $l \geqslant n \geqslant 0$, справедливо равенство*

$$\sigma_{l-n}(z_0,\ldots,z_n) = \left[z^l; z_0,\ldots,z_n\right].$$

Свойство 2. *При любых комплексных $z_0,\ldots,z_n$ справедливо равенство*

$$\sigma_k(z_0,\ldots,z_n) = \sum_{m=0}^{k}\sigma_m(z_1,\ldots,z_n)\,z_0^{k-m}.$$

Свойство 3. *Справедливо равенство*

$$\sigma_{k-1}(z_0,z_1,\ldots,z_{n+1}) = \frac{\sigma_k(z_0,z_1,\ldots,z_n)-\sigma_k(z_1,\ldots,z_{n+1})}{z_0-z_{n+1}},\quad \text{если } z_0 \neq z_{n+1},$$

и равенство

$$\sigma_{k-1}(z_0,\ldots,z_n,z_0) = \frac{\partial\sigma_k(z,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z}\Big|_{z=z_0},\quad \text{если } z_0 = z_{n+1}.$$

Заметим, что в вышеуказанных формулах аргументы перестановочны. Этим замечанием мы пользуемся и в дальнейшем.

Свойство 4. *Пусть $\zeta_0,\ldots,\zeta_s$ и $\xi_0,\ldots,\xi_p$ – два множества комплексных чисел. Тогда справедливо равенство*

$$\sigma_k(\zeta_0,\ldots,\zeta_s,\xi_0,\ldots,\xi_p) = \sum_{m=0}^{k}\Delta_{k,m}(\zeta_0,\ldots\zeta_s,\xi_0,\ldots,\xi_p), \tag{1}$$

где

$$\Delta_{k,m}(\zeta_0,\ldots\zeta_s,\xi_0,\ldots,\xi_p) = \sigma_{k-m}(\zeta_0,\ldots,\zeta_s)\cdot\sigma_m(\xi_0,\ldots,\xi_p)\,.$$

Доказательство. Согласно свойству 2 при любых фиксированных $\xi_0, \ldots, \xi_p$ справедливо тождество по ζ:

$$\sigma_{k+s}(\zeta, \xi_0 \ldots, \xi_p) = \sum_{m=0}^{k+s} \zeta^{k+s-m} \sigma_m(\xi_0, \ldots, \xi_p). \tag{2}$$

Пользуясь элементарными свойствами разделенных разностей, возьмем от обеих частей тождества (2) разделенную разность s-го порядка по точкам $\zeta_0, \ldots, \zeta_s$:

$$[\sigma_{k+s}(\zeta, \xi_0, \ldots, \xi_p); \zeta_0, \ldots, \zeta_s] = \sum_{m=0}^{k} \sigma_{k-m}(\zeta_0, \ldots, \zeta_s) \cdot \sigma_m(\xi_0, \ldots, \xi_p).$$

С другой стороны

$$[\sigma_{k+s}(\zeta, \xi_0, \ldots, \xi_p); \zeta_0, \ldots, \zeta_s] = \left[\left[\zeta^{k+s+p+1}; \zeta, \xi_0, \ldots, \xi_p\right]; \zeta_0, \ldots, \zeta_s\right]$$
$$= \left[\zeta^{k+s+p+1}; \zeta_0, \ldots, \zeta_s, \xi_0, \ldots, \xi_p\right] = \sigma_k(\zeta_0, \ldots, \zeta_s, \xi_0, \ldots, \xi_p).$$

Отсюда следует наше утверждение.

Последовательность положительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_k$ назовем χ-последовательностью, если для ее членов выполняются неравенства

$$a_m^2 \geqslant a_{m+1} a_{m-1}, \quad m = 1, \ldots, k-1. \tag{3}$$

Если последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_k$ такова, что $a_0 = a_1 = \ldots = a_k$, то она называется тривиальной χ-последовательностью. Простейшим примером χ-последовательности является геометрическая прогрессия. Тривиальную χ-последовательность не будем причислять к геометрической прогрессии и будем называть просто тривиальной последовательностью. Заметим, что из (3) следует

$$\ln a_m \geqslant \frac{\ln a_{m+1} + \ln a_{m-1}}{2}.$$

Это означает, что χ-последовательность является логарифмически выпуклой числовой последовательностью. Из (3) также следует, что

$$\frac{a_0}{a_1} \leqslant \frac{a_1}{a_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a_{m-1}}{a_m}.$$

С χ-последовательностями можно познакомиться в [3]. Из сказанного сразу следует справедливость следующих лемм.

Лемма 1. *Если последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_k$ есть χ-последовательность, то она может быть только следующих двух типов:*

1. *Монотонной (возрастающей, убывающей, тривиальной).*

2. *Возрастающе-убывающей, т.е. найдется такое число l, что сначала $a_0 \leqslant a_1 \leq \ldots \leqslant a_l$, а затем $a_l \geqslant a_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant a_k$, где среди чисел $a_0, a_1, \ldots, a_k$ есть хотя бы два числа, не равных между собой.*

Лемма 2. *Пусть*

$$a_0, a_1, \ldots, a_k, \tag{4}$$

$$b_0, b_1, \ldots, b_k \tag{5}$$

есть две χ-последовательности. Тогда последовательность

$$a_0 b_0, \ldots, a_k b_k \tag{6}$$

также есть χ-последовательность. Далее, для того чтобы χ-последовательность (6) была геометрической прогрессией необходимо и достаточно, чтобы χ-последовательности (4) и (5) были геометрическими прогрессиями с произведением знаменателей, не равным единице, либо одна из них была бы геометрической прогрессией, а другая была бы тривиальной. Для того чтобы χ-последовательность (6) была тривиальной необходимо и достаточно, чтобы обе χ-последовательности (4) и (5) были тривиальными или обе χ-последовательности (4) и (5) были бы геометрическими прогрессиями с произведением знаменателей, равным единице.

Лемма 3. *Если последовательность $c_0, \ldots, c_k$ есть χ-последовательность, то и последовательность $c_k, \ldots, c_0$ есть также χ-последовательность.*

Следующие две теоремы связывают χ-последовательности и однородные симметрические многочлены.

Теорема 1. *Пусть $v_0, \ldots, v_s$ – неотрицательные числа и $v_0 > 0$. Тогда при любых $s \geqslant 0$ и $l \geqslant 0$ последовательность симметрических многочленов*

$$\sigma_l (v_0, \ldots, v_s), \sigma_{l+1} (v_0, \ldots, v_s), \sigma_{l+2} (v_0, \ldots, v_s), \ldots, \tag{7}$$

имеющая не менее трех членов есть χ-последовательность. При любом фиксированном m, где $m \geqslant l$, тройка многочленов

$$\sigma_m (v_0, \ldots, v_s), \sigma_{m+1} (v_0, \ldots, v_s), \sigma_{m+2} (v_0, \ldots, v_s) \tag{8}$$

может быть геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью лишь в том случае, если она имеет вид

$$v_0^m, v_0^{m+1}, v_0^{m+2}. \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\sigma_{m,s} = \sigma_m(v_0, \ldots, v_s)$. Установим, что

$$\sigma^2_{m,s} \geqslant \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} \tag{10}$$

при любом $m \geqslant l+1$ и любом $s \geqslant 0$. Для этого воспользуемся индукцией по s. При $s = 0$ имеем $\sigma_{m,0}(v_0) = v_0^m$. Значит, при $s = 0$ и любом $m \geqslant 1$ неравенство (10), как следует из (9), будет справедливо. Пусть неравенство (10) справедливо при некотором $s = p$ и любом $m \geqslant l+1$. Докажем справедливость неравенства (10) при $s = p+1$ и любом $m \geqslant l+1$. Имеем

$$\sigma_{m,p+1} = v^m_{p+1} + \sigma_{1,l} \cdot v^{m-1}_{p+1} + \ldots + \sigma_{m-1,p} \cdot v_{p+1} + \sigma_{m,p}. \tag{11}$$

Отсюда

$$\sigma_{m,p+1} = v_{p+1} \cdot \sigma_{m-1,p+1} + \sigma_{m,p}.$$

Далее, вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}&\sigma^2_{m,p+1} - \sigma_{m+1,p+1} \cdot \sigma_{m-1,p+1}\\ &\quad = \sigma_{m,p} \cdot v^m_{p+1} + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-j,p} - \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}\right) \cdot v^j_{p+1}.\end{aligned}$$

Докажем, что при любом $m \geqslant l+j+1$ будут выполняться неравенства

$$\sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-j,p} - \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p} \geqslant 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-l-1. \tag{12}$$

Действительно, по предположению при $s = p$ и любом $m \geqslant l+j+1$ имеем

$$\begin{aligned}&\sigma^2_{m,p} \geqslant \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-1,p},\\ &\sigma^2_{m-1,p} \geqslant \sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-2,p},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\sigma^2_{m-j,p} \geqslant \sigma_{m-j+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}.\end{aligned}$$

Перемножая эти неравенства, получим неравенство

$$\sigma^2_{m,p} \cdot \sigma_{m-1,p} \cdot \ldots \cdot \sigma_{m-j,p} \geqslant \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-1,p} \cdot \ldots \cdot \sigma_{m-j+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}.$$

Деля обе части последнего неравенства на общие множители, придем к неравенствам (12). Из неравенств (11) и (12) и того, что $\sigma_{m,p} > 0$ и $v_{p+1} \geqslant 0$, заключаем о справедливости неравенств (10) при $s = p+1$. Пользуясь индукцией по s, убеждаемся в том, что неравенство (10) имеет место при любом $s \geqslant 0$ и любом $m \geqslant l+1$. Это означает, что последовательность (7) есть χ-последовательность. Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана. Докажем вторую часть теоремы 1. Пусть $v_0 > 0$, $v_0 \neq 1$, $s=0$ или, $v_0 > 0$, $v_0 \neq 1$, $s > 0$, $v_1 = v_2 = \ldots = v_s = 0$. Тогда для любого $m \geqslant 0$ имеем

$$\sigma_m(v_0) = \sigma_m\Big(v_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s}\Big) = v_0^m,$$

что приводит нас к геометрической прогрессии. Может случиться, что $v_0 = 1$ и тогда мы получим тривиальную последовательность, образованную из единиц. В остальных случаях, т.е. если среди чисел $v_0, \ldots v_s$ есть хотя бы два числа, не равные нулю, то тройка чисел (8) не образует геометрической прогрессии, а также тривиальной последовательности. В самом деле, в силу симметрического свойства многочленов $\sigma_m(v_0, \ldots, v_s)$ относительно переменных $v_0, \ldots, v_s$ можно считать, что $v_0 > 0$ и $v_s > 0$. Опираясь на формулу (11), имеем для любого $m \geqslant l+1$ равенство

$$\begin{aligned}&\sigma_{m,s}^2 - \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} \\ &\quad = \sigma_{m,s-1} \cdot v_s^m + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sigma_{m,s-1} \cdot \sigma_{m-j,s-1} - \sigma_{m+1,s-1} \cdot \sigma_{m-j-1,s-1}\right) \cdot v_s^j,\end{aligned}$$

причем, согласно формуле (12), справедливо неравенство

$$\sigma_{m,s-1} \cdot \sigma_{m-j,s-1} - \sigma_{m+1,s-1} \cdot \sigma_{m-j-1,s-1} \geqslant 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-l-1.$$

Кроме того, $\sigma_{m,s-1} > 0$ и $v_s > 0$. Поэтому

$$\sigma_{m,s}^2 - \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} > 0$$

при любом $m \geqslant l+1$. Значит, тройка чисел (8) не образует геометрической прогрессии и не может быть тривиальной последовательностью.

Теорема 2. *Пусть $v_0, \ldots, v_s$ и $r_0, \ldots, r_p$ – два множества неотрицательных чисел и $v_0 > 0$, $r_0 > 0$. Тогда последовательность*

$$\Delta_{k,m}(v_0, \ldots, v_s, r_0, \ldots, r_p), \quad m = 0, 1, \ldots, k \text{ , где } k \geqslant 2, \tag{13}$$

является χ-последовательностью. Эта χ-последовательность будет геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью лишь тогда, когда она приводится к виду

$$v_0^k, v_0^{k-1} r_0, \ldots, v_0 r_0^{k-1}, r_0^k. \tag{14}$$

Доказательство. По теореме 1 и лемме 3 последовательности

$$\sigma_0\left(v_0,\ldots,v_p\right),\sigma_1\left(v_0,\ldots,v_p\right),\ldots,\sigma_k\left(v_0,\ldots,v_p\right), \tag{15}$$

$$\sigma_k\left(r_0,\ldots,r_p\right),\sigma_{k-1}\left(r_0,\ldots,r_p\right),\ldots,\sigma_0\left(r_0,\ldots,r_p\right), \tag{16}$$

являются χ-последовательностями. Перемножая эти последовательности и пользуясь леммой 2, получим последовательность

$$\sigma_0(v_0,\ldots,v_s)\sigma_k(r_0,\ldots,r_p),\sigma_1(v_0,\ldots,v_s)\sigma_{k-1}(r_0,\ldots,r_p),\ldots,$$
$$\sigma_k(v_0,\ldots,v_s)\sigma_0(r_0,\ldots,r_p),$$

которая также будет χ-последовательностью. Вспоминая формулу 1 из свойства 4, получим, что последовательность (13) есть χ-последовательность. Это доказывает первую часть теоремы 2. Докажем вторую часть теоремы 2. Если $s+p=0$ или $s+p>0$ и $v_1=\ldots=v_s=r_1=\ldots=r_p=0$, то в обоих случаях получим последовательность

$$\Delta_{k,m}\left(v_0,r_0\right)=\Delta_{k,m}\Big(v_0,\underbrace{0,\ldots,0}_{s},r_0,\underbrace{0,\ldots,0}_{p}\Big)=v_0^{k-m}r_0^m,m=0,1,\ldots,k,$$

вида (14), которая будет геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью. Остается показать, что в остальных случаях χ-последовательность (13) не будет геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью. Действительно, пусть вопреки нашему утверждению χ-последовательность (13) является геометрической прогрессией или тривиальной χ-последовательностью. Тогда по лемме 2 последовательности (15) и (16) будут геометрическими прогрессиями или тривиальными последовательностями. Так как среди чисел $v_0,\ldots,v_s$, $r_0,\ldots,r_p$ есть хотя бы три числа, отличные от нуля, то в одной из последовательностей (15), (16) есть хотя бы два числа, отличные от нуля. Согласно теореме 1 одна из этих последовательностей не будет геометрической прогрессией и не будет тривиальной последовательностью. Получаем противоречие, которое доказывает наше утверждение.

В качестве приложения приведем без доказательства еще одну теорему.

Теорема 3. *Пусть $D\left(\alpha\right)$ – область, являющаяся внутренностью угла с вершиной в начале координат и величиной α, где $0<\alpha<2\pi/\left(k+1\right)$. Тогда*

$$\sigma_k\left(z_0,\ldots,z_n\right)\neq 0,\forall z_0,\ldots,z_n\in D\left(a\right).$$

Литература

[1] А.О. Голузин, *Исчисление конечных разностей*, М., Гостехиздат (1952).
[2] И.И. Ибрагимов, *Методы интерполирования функций и их применения*, М., Наука (1971).
[3] Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, Часть первая, М., Гостехиздат (1956).

Apie kai kurias simetriško daugianario savybes

E.G. Kirjackis

Darbe nagrinėjamos homogeninių simetriškų daugianarių sekų savybės. Nustatytas ryšys tarp šitų sekų ir logaritmiškai iškilių sekų teigiamų skaičių.