Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 147–152

Структура решений одного вырождающегося эллиптического уравнения

Дайва КОРСАКЕНЕ (ŠU)
e-mail: korsakiene@fm.su.lt

1. Введение

В теории уравнений с частными производными имеется ряд эффектов, которые не имеют аналогий в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Примером таких явлений может служить полерегулярное вырождение [3]. В работе [1] показано, что решения уравнения

$$z^2(u_{zz} + z^k \Delta u) + \mu z u_z + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x, y, z)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, k – целое положительное число, имеют следующую структуру:

$$u = z^{\rho_1} g(x, y, z) + z^{\rho_2} h(x, y, z),$$

где $g(x, y, z)$ и $h(x, y, z)$ – голоморфные в окрестности начала координат функции, а ρ_1 и ρ_2 – корни уравнения

$$\rho(\rho - 1) + \mu\rho + \lambda = 0,$$

причем разность $\rho_1 - \rho_2$ не является целым числом.

2. Постановка и решение задачи

В данной работе рассмотрим в окрестности гиперплоскости T: $\{z = 0\}$ вырождающееся эллиптическое уравнение

$$z^2(u_{zz} + z^k \Delta u) + z a(z) u_z + b(z) u = 0, \tag{2}$$

где $u = u(z, x_1, \ldots, x_m) = u(z, X)$, $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$, k – целое положительное число, $a(z)$ и $b(z)$ – голоморфные функции в окрестности точки $z = 0$.

Решение этой задачи будем искать в виде ряда

$$u(z,X)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i(z)\Delta^i u_0, \tag{3}$$

здесь $u_0=u_0(X)$ – произвольная голоморфная в некотором полицилиндре V: $\{|x_i-\alpha_i|\leqslant r_i,\ \ i=1,...,m\}$ функция.

Подставив (3) в уравнение (2) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем рекуррентные соотношения для определения функций $\varphi_i(z)$:

$$z^2\varphi_0''+za(z)\varphi_0'+b(z)\varphi_0=0, \tag{4}$$

$$z^2\varphi_i''+za(z)\varphi_i'+b(z)\varphi_i=-z^{k+2}\varphi_{i-1},\quad i=1,2,.... \tag{5}$$

Уравнение (4) имеет два линейно независимых интеграла вида

$$\varphi_0^1=z^{\rho_1}f_1(z),\quad \varphi_0^2=z^{\rho_2}f_2(z), \tag{6}$$

где ρ_1 и ρ_2 – корни уравнения

$$\rho(\rho-1)+a(0)\rho+b(0)=0,$$

причем разность $\rho_1-\rho_2$ не является целым числом, а функции $f_1(z), f_2(z)$ – голоморфные функции в окрестности точки $z=0$ и $f_1(0)\neq 0$, $f_2(0)\neq 0$.

Будем считать, что $\mathrm{Re}\,\rho_2>\mathrm{Re}\,\rho_1$. Тогда частное решение уравнения (5) будем находить по формуле:

$$\varphi_{i+1}(z)=-\int_0^z\frac{z^{\rho_1}f_1(z)\zeta^{\rho_2}f_2(\zeta)-z^{\rho_2}f_2(z)\zeta^{\rho_1}f_1(\zeta)}{\zeta^{-1+\rho_1+\rho_2}R(\zeta)}\zeta^k\varphi_i(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \tag{7}$$

где $R(z)$ – голоморфная в окрестности точки $z=0$ функция, причем $R(0)\neq 0$.

3. Нахождение функций φ_i

Интеграл в формуле (7) сходится для таких $\varphi_i(\zeta)$, которые имеют вид $\varphi_i(z)=z^s\nu_i(z)$, где $\nu_i(z)$ – голоморфная в окрестности $z=0$ функция, а s удовлетворяет неравенству $\mathrm{Re}\,s>\max\{|\mathrm{Re}\,\rho_1|,|\mathrm{Re}\,\rho_2|\}$. Тогда из (7) следует, что $\varphi_{i+1}(z)$ имеет вид

$$\varphi_{i+1}(z)=z^{s+2+k}\nu_{i+1}(z), \tag{8}$$

где $\nu_{i+1}(z)$ – голоморфная в окрестности $z=0$ функция. Покажем, что найдется конечное N такое, что $\varphi_N=z^sh(z)$ и все $\varphi_i(z)$ при $i\leqslant N$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (4) и (5).

Рассмотрим уравнение (5) для функции $\varphi_1(z)$, которое может быть приведено к виду

$$\varphi_1'' + \frac{a(z)}{z}\varphi_1' + \frac{b(z)}{z^2}\varphi_1 = -z^{k+\rho}h_0(z), \tag{9}$$

где число ρ – один из корней ρ_1, ρ_2, $h_0(z)$ – аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция. Пусть

$$a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \quad b(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i, \quad h_o(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i. \tag{10}$$

Решение уравнения (9) будем искать в виде ряда

$$\varphi_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{\rho+i+2+k} = z^{\rho+2+k}h_1(z). \tag{11}$$

Подставив (10) и (11) в уравнение (9) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z и обозначив

$$E_0(\rho) = (\rho + k + 2)(\rho + k + 1) + a_0(\rho + k + 2) + b_0,$$
$$E_i(\rho) = a_i(\rho + k + 2) + b_i,$$

получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов d_i

$$d_0E_0(\rho) = c_0,$$
$$d_1E_0(\rho + 1) + d_0E_1(\rho) = c_1,$$
$$d_nE_0(\rho + n) + \sum_{i=1}^{n} d_{n-i}E_i(\rho + n - i) = c_n. \tag{12}$$

Так как ρ – один из корней уравнения

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0,$$

а разность $\rho_2 - \rho_1$ не является целым числом, то $E_0(\rho + n) \neq 0$ для всех натуральных n. Поэтому из (12) найдем

$$d_n = \frac{c_n}{E_0(\rho + n)} - \sum_{i=1}^{n} d_{n-i}\frac{E_i(\rho + n - i)}{E_0(\rho + n)}. \tag{13}$$

Пусть R_1 – радиус круга, в котором сходятся ряды (10), N – некоторое фиксированное число. Воспользуясь оценками при $n \geqslant N$, полученными в [3]

$$\left|\frac{E_i(\rho + n - i)}{E_o(\rho + n)}\right| \leqslant \frac{|\rho| + n}{|E_o(\rho + n)|}(|a_i| + |b_i|) < (|a_i| + |b_i|),$$

из (13) имеем

$$|d_n| < |c_n| + \sum_{i=1}^{n}(|a_i| + |b_i|)|d_{n-i}|. \tag{14}$$

Для коэффициентов a_i, b_i, c_i найдем оценки

$$|a_i| < MR_1^{-i}, |b_i| < MR_1^{-i}, |c_i| < MR_1^{-i}, \tag{15}$$

где $M = \max\left\{\max_{|z|\leqslant R_1}|a(z)|, \max_{|z|\leqslant R_1}|b(z)|, \max_{|z|\leqslant R_1}|h_0(z)|\right\}$.

Каковы бы ни были $d_0, d_1, \ldots, d_N$, всегда можно найти такое число P, чтобы

$$|d_i| < P^i R_1^{-i}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{16}$$

Пусть неравенство (16) справедливо для всех $i < n$. Число P можно выбрать так, что (16) быдет выполняться и для $i = n$. Действительно из (14) и (15) имеем

$$|d_n| < \frac{M}{R_1^n}\left\{1 + 2\sum_{i=0}^{n-1} P^i\right\} = \frac{M}{R_1^n}\left\{1 + 2\frac{P^n - 1}{P - 1}\right\}.$$

Для того чтобы (16) выполнялось при $i = n$, достаточно положить $P > 3M + 1$. Итак, оценка (16) справедлива при всех натуральных i, а ряд (11) для $h_1(z)$ сходится при всех z, удовлетворяющих неравенству

$$|z| < R_1 P^{-1}. \tag{17}$$

Точно так же докажем, что $\varphi_2(z) = z^{\rho+2(k+2)}h_2(z)$, где $h_2(z)$ – голоморфная в круге $|z| < R_1 P^{-1} P_1^{-1}$ функция, а P_1 – некоторое число. После $N = [\operatorname{Re}\rho_2 + 1]$ таких шагов получим требуемое φ_N и число R_N такое, что все $\varphi_i(z)$ голомрфны в круге $|z| < R_N$.

Из построения функций φ_N следует, что в круге $|z| < R_N$ при $i \leqslant N$ справедлива оценка

$$|\varphi_i| < M_i |z|^{\operatorname{Re}\rho + i(k+2)}, \tag{18}$$

где M_i – некоторая положительная постоянная

$$M_i = \frac{M_o^i \Gamma(\sigma/2)\Gamma(3/2)q}{(k+2)^{2i}\Gamma\left(i + \frac{\sigma}{k+2}\right)\Gamma\left(i - 1 + \frac{\sigma-1}{k+2}\right)}.$$

Здесь M_o и q – некоторые новые постоянные, а $\sigma = \operatorname{Re}(\rho_2 - \rho_1)$.

Обозначив

$$M(z,\zeta)=\frac{f_1(z)f_2(\zeta)-f_2(z)f_1(\zeta)}{R(\zeta)(z-\zeta)\zeta},\qquad N(z,\zeta)=\frac{f_2(z)f_1(\zeta)}{R(\zeta)},$$

перепишем формулу (7) так

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1}(z)=&-\int_0^z\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\rho_1}(z-\zeta)M(z,\zeta)\varphi_i(\zeta)\zeta^k\,\mathrm{d}\zeta\\&-\int_0^z\frac{z^{\rho_1}\zeta^{\rho_2}-z^{\rho_2}\zeta^{\rho_1}}{\zeta^{-1+\rho_1+\rho_2}}N(z,\zeta)\varphi_i(\zeta)\zeta^k\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}\tag{19}$$

Функции $M(z,\zeta)$ и $N(z,\zeta)$ голоморфны в некоторой области B: $\{|z|\leqslant r,|\zeta|\leqslant r\}$. Введем обозначения

$$M'=\max_B|M(z,\zeta)|,\quad H=\max_B|N(z,\zeta)|,\quad \lambda_i=\operatorname{Re}\rho_\mathrm{i},\quad \mathrm{i}=1,2.$$

Положим в формуле (19) $i=N$, тогда из (18) имеем

$$\begin{aligned}|\varphi_{N+1}(z)|\leqslant&\int_0^{|z|}\left(\frac{|z|}{|\zeta|}\right)^{\lambda_1}(|z|-|\zeta|)M'M_N|\zeta|^{\operatorname{Re}\rho+\mathrm{N}(\mathrm{k}+2)+\mathrm{k}}\,\mathrm{d}|\zeta|\\&+\int_0^{|z|}\frac{-|z|^{\lambda_1}|\zeta|^{\lambda_2}+|z|^{\lambda_2}|\zeta|^{\lambda_1}}{|\zeta|^{\lambda_1+\lambda_2-1}}HM_N|\zeta|^{\operatorname{Re}\rho+\mathrm{N}(\mathrm{k}+2)+\mathrm{k}}\,\mathrm{d}|\zeta|.\end{aligned}\tag{20}$$

В формуле (19) фиксируется некоторая определенная ветвь функции $\varphi_i(z)$ и интегрирование ведется по лучу $\arg\zeta=\arg z$. В результате выделяем некоторую ветвь функции $\varphi_{i+1}(z)$, которая определена и однозначна в окрестности точки $z=0$, разрезанной по тому же лучу прямой, что и для ветви $\varphi_i(z)$. В качестве такого разреза будем брать луч $\arg\zeta=\pi$. Неравенство (20) имеет место для всех фиксированных ветвей функций $\varphi_i(z)$, а на остальные ветви легко распространяется аналитическим продолжением.

Из (20) находим

$$\begin{aligned}|\varphi_{N+1}(z)|\leqslant&\frac{M_N\left[M'+H(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\operatorname{Re}\rho-\lambda_1+(\mathrm{N}+1)(\mathrm{k}+2)-1}{\operatorname{Re}\rho-\lambda_2+(\mathrm{N}+1)(\mathrm{k}+2)}\right]}{(\operatorname{Re}\rho-\lambda_1+(\mathrm{N}+1)(\mathrm{k}+2)-1)(\operatorname{Re}\rho-\lambda_1+(\mathrm{N}+1)(\mathrm{k}+2))}\\&\times|z|^{\operatorname{Re}\rho+(\mathrm{N}+1)(\mathrm{k}+2)}.\end{aligned}\tag{21}$$

Выбирая $M_0\geqslant M'+H(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\operatorname{Re}\rho-\lambda_1+(\mathrm{i}+1)(\mathrm{k}+2)-1}{\operatorname{Re}\rho-\lambda_2+(\mathrm{i}+1)(\mathrm{k}+2)}$, $i\geqslant N$, из (18) получим оценку

$$|\varphi_{N+1}(z)|\leqslant\frac{M_o^{N+1}\Gamma(\sigma/2)\Gamma(3/2)q}{(k+2)^{2(N+1)}\Gamma\left(N+1+\frac{\sigma}{k+2}\right)\Gamma\left(N+\frac{\sigma-1}{k+2}\right)}|z|^{\operatorname{Re}\rho+(\mathrm{N}+1)(\mathrm{k}+2)}.$$

Продолжая далее подобные оценки, по индукции найдем следующую оценку, справедливую для всех i

$$|\varphi_i(z)| \leqslant \frac{M_0^i\Gamma(\sigma/2)\Gamma(3/2)q}{(k+2)^{2i}\Gamma\left(i+\frac{\sigma}{k+2}\right)\Gamma\left(i-1+\frac{\sigma-1}{k+2}\right)}|z|^{\operatorname{Re}\rho+i(k+2)}. \tag{22}$$

Рассмотрим два семейства решений уравнения (2)

$$u_1(z,X)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i^{(1)}(z)\Delta^i f(X), \quad u_2(z,X)=\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i^{(2)}(z)\Delta^i g(X), \tag{23}$$

где f и g – функции, голоморфные в полицилиндре V, а функции $\varphi_0^{(1)}(z)=z^{\rho_1}f_1(z)$, $\varphi_0^{(2)}(z)=z^{\rho_2}f_2(z)$ и все остальные $\varphi_i^{(j)}(z)$ определяются по формуле (7). Из оценки (22) следует, что ряды $z^{-\rho_1}u_1$ и $z^{-\rho_2}u_2$ сходятся абсолютно и равномерно в области

D: $\left\{|x_i-\alpha_i|\leqslant\frac{1}{2}r_i, |z|<[(r(k+2))^2(4mM_0)^{-1}]^{\frac{1}{k+2}}\right\}$, $i=1,\ldots,m$, $r=\min_i r_i$. Решения (23) имеют вид $u_1=z^{\rho_1}h_1(z,X), u_2=z^{\rho_2}h_2(z,X)$, где h_1 и h_2 – голоморфные в области D функции.

Итак, мы построили два семейства решений уравнения (2), голоморфных в области V всюду, за исключением, быть может, точек гиперплоскости T: $\{z=0\}$.

Литература

[1] Д.А. Корсакене, Задача Коши для вырождающегося эллиптического уравнения, *Liet. matem. rink.*, **42**(spec. nr.), 184–188 (2002).

[2] Д.А. Корсакене, О задаче Коши для вырождающегося уравнения второго порядка, *Дифференциальные уравнения*, **33**(4), Минск, 560–562 (1997).

[3] А.И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Новосибирск, Наука (1979).

[4] В.А. Фукс, *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных.* Москва, Наука (1985).

Išsigimusios elipsinės lygties Koši uždavinys

D. Korsakienė

Randamos dvi lygties

$$z^2(u_{zz}+z^k\Delta u)+za(z)u_z+b(z)u=0$$

sprendinių šeimos, analizinės hiperplokštumos T: $\{z=0\}$ aplinkoje, kai lygties $\rho(\rho-1)+a(0)\rho+b(0)=0$ šaknų skirtumas nėra sveikasis skaičius.