Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 153–155

О разрушении решения нелинейного уравнения Шредингера с малой нормой в суперкритическом случае

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)
e-mail: gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

В n-мерном пространстве рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i|u|^p u, \quad t > 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{2}$$

в суперкритическом случае $p > 4/n$. Здесь $u(t,x)$ – неизвестная функция из H_1, $x \in R^n$, $n \geqslant 2$, $i = \sqrt{-1}$, Δ – оператор Лапласа.

Известно, что при $p \geqslant 4/n$ существует взрывающееся решение [1], т.е. существует функция u_0 и конечное число T такие, что

$$\lim_{t\to T} \|\nabla u(t,x)\|_2 = \infty, \quad \lim_{t\to T} \|u(t,x)\|_\infty = \infty. \tag{3}$$

Если $1 < p < 4/n$, то любое решение задачи (1), (2) является глобальным [2], т.е. $\|\nabla u(t,x)\|_2 < \infty$ и $\|u(t,x)\|_\infty < \infty$, если $t < \infty$.

М.И.Вайнштейн [1] доказал, что в критическом случае $p = 4/n$ решение задачи (1), (2) является глобальным, если норма в L_2 начальной функции достаточно мала. Более точно, решение задачи (1), (2) является глобальным, если $\|u_0\|_2 < \|\phi\|_2$, где ϕ является положительным, радиальным и убывающим на бесконечность решением дифференциального уравнения

$$\Delta\phi - \phi + \phi^{1+4/n} = 0$$

с минимальной нормой. Возникает вопрос, справедлив ли аналогичный результат для $p > 4/n$, т.е. существует ли константа $c_{n,p}$, зависищее только от n и p такая, что из условия $\|u_0\|_2 < c_{n,p}$ следует глобальность решения (1), (2). В настоящей работе дан отрицательный ответ: для любой положительной константы ε существует разрушающееся решение задачи (1), (2), удовлетворяещее условию $\|u_0\|_2 \leqslant \varepsilon$. В теореме 1 построенная функция $u_0(x)$ зависит от константы ε, $u_0 = u_{0\varepsilon}$ и является уже "почти взрывавшейся", т.е. $u_{0\varepsilon}(0) \to \infty$, если $\varepsilon \to 0$, и равна нулю вне достаточно малой окрестности нуля.

Теорема 1. *Пусть $p > 4/n$, $n \geqslant 2$, ε любое положительное число. Тогда существует взрывающееся решение задачи (1), (2) из H_1, удовлетворяещее условию $\|u_0\|_2 \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Начальной функции u_0 будем искать среди вещественных, радиальных функции, т.е. $u_0(x) = u_0(|x|) = u_0(r)$. Обозначим через ω_n площадь единичной сферы в n-мерном пространстве. Пусть

$$u_0(r) = \begin{cases} h - \frac{h}{a}r, & 0 \leqslant r \leqslant a, \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

где h и a неизвестные положительные константы. Находим интегралы

$$\int_{R^n} |\nabla u_0|^2 \, \mathrm{d}x = \omega_n \int_0^a \left(\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)^2 r^{n-1} \, \mathrm{d}r = \frac{h^2 a^{n-2} \omega_n}{n},$$

$$\int_{R^n} |u_0|^{p+2} \mathrm{d}x = \omega_n h^{p+2} a^n \int_0^1 t^{p+2}(1-t)^{n-1} \, \mathrm{d}t = \omega_n h^{p+2} a^n \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j \frac{(-1)^j}{p+3+j}.$$

Сумму $\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j \frac{(-1)^j}{p+3+j}$ обозначим $S_{n,p}$. $S_{n,p}$ положительна и конечна для любых n и $p \geqslant 0$. Пусть задано любое положительное число ε. Если $p = 0$, из условия $\|u_0\|_2 = \varepsilon$ получаем

$$\omega_n h^2 a^n S_{n,0} = \varepsilon^2. \tag{4}$$

Отсюда

$$a^2 = \left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_n S_{n,0}}\right)^{\frac{2}{n}} h^{-4/n}.$$

Обозначим

$$\Phi(u) = \int_{R^n} |x|^2 |u|^2 \mathrm{d}x, \quad I_1(u) = \int_{R^n} |u|^2 \, \mathrm{d}x,$$

$$I_2(u) = \int_{R^n} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{2}{p+2} \int_{R^n} |u|^{p+2} \, \mathrm{d}x.$$

Известно [4], что

$$\Phi'' = \frac{\partial^2 \Phi(u(t,x))}{\partial t^2} = 2npI_2 - 4\left(\frac{np}{2} - 2\right) I_1, \tag{5}$$

I_1, I_2 не зависит от t, если u решение задачи (1), (2). Если $\Phi'' < 0$, то решение имеет взрыв. $\Phi'' < 0$, если $p > 4/n$ и $I_2 < 0$. Вставляя u_0 в I_2, получаем

$$I_2(u_0) = \frac{\omega_n h^2 a^{n-2}}{n} - \frac{2}{p+2}\omega_n h^{p+2} a^n S_{n,p} = \omega_n h^2 a^{n-2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{2S_{n,p}h^p a^2}{2+p}\Big) =$$
$$= \omega_n h^2 a^{n-2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{2S_{n,p}}{2+p}\Big(\frac{\varepsilon^2}{\omega_n S_{n,0}}\Big)^{\frac{2}{n}} h^{p-4/n}\Big) < 0,$$

если h достаточно большое. Зная h, число a определяем из равенства (4). Теорема 1 доказана.

Видим, что если $\varepsilon \to 0$, то $h \to \infty$, тем самым $\|u_0\|_\infty \to \infty$, т.е. решение является "почти взрывавшимся" уже в начальный момент времени.

В критическом случае $p = 4/n$ имеем равенство

$$I_2(u_0) = \omega_n h^2 a^{n-2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{2S_{n,p}}{2+p}\Big(\frac{\varepsilon^2}{\omega_n S_{n,0}}\Big)^{\frac{2}{n}}\Big).$$

В этом случае выражение в скобках не зависит от h и является положительным при достаточно маленком ε. Решение имеет коллапс, т.е. $I_2 < 0$, если

$$\varepsilon > \Big(\frac{p+2}{2n}\Big)^{n/4}(\omega_n S_{n,0})^{1/2}.$$

Литература

[1] M.I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, *Comm. Math. Phys.*, **87**, 567–576 (1983).

[2] M.I. Weinstein, On the structure and formation of singularities in solutions to the nonlinear dispersive evolution equations, *Comm. Partial Differential Equations*, **11**, 545–565 (1986).

[3] K. Rypdal, J.J. Rasmussen, Blow-up in nonlinear Schrödinger equation, I, II, *Phys. Scr.*, **33**, 481–504 (1986).

[4] A. Домаркас, О разрушении решений системы нелинейных уравнений Шредингера, *Liet. matem. rink.*, **35**(2), 181–189 (1995).

Apie Šredingerio lygties mažos normos sprendinio sprogimą kritiniu atveju

G. Puriuškis

Nagrinėjama Šredingerio lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i|u|^p u, \quad t > 0$$

su pradine sąlyga $u(0,x) = u_0(x)$, $n \geq 2$.

Įrodytas sprogstančio sprendinio su kiek norima maža L_2 norma egzistavimas. Kritiniu atveju trumpai paliečiamas klausimas apie tai, kokio dydžio yra sprogstančio sprendinio norma.